Durée : 4 heures

Baccalauréat S Amérique du Sud novembre 2007

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. **a.** Sachant que $\varphi : x \mapsto \mathrm{e}^x$ définie sur $\mathbb{R}$ vérifie $\varphi' = \varphi$, montrons que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{ax}$ est solution de l'équation $y' = ay$.

Pour tout réel x, $f(x) = \varphi(ax)$. f est donc une fonction dérivable et, pour tout réel x, $f'(x) = a\varphi'(ax) = a\mathrm{e}^{ax} = af(x)$. f est donc solution de l'équation $y' = ay$

b. Si g est une solution de l'équation $y' = ay$, alors, pour tout réel x, $g'(x) = ag(x)$. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = g(x)\mathrm{e}^{-ax}$. La fonction h produit de fonctions dérivables est dérivable et, pour tout réel x :

$h'(x) = g'(x)\mathrm{e}^{-ax} - ag(x)\mathrm{e}^{-ax} = ag(x)\mathrm{e}^{-ax} - ag(x)\mathrm{e}^{-ax} = 0$. Donc h' est nulle sur $\mathbb{R}$ et h est une fonction constante.

c. D'après **1.b.**, si g est solution de $y' = ay$ alors g vérifie la propriété : pour tout réel x, $h(x) = g(x)\mathrm{e}^{-ax} = K \iff g(x) = K\mathrm{e}^{ax}$.

Réciproquement, si g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = K\mathrm{e}^{ax}$ alors , pour tout réel x, $g'(x) = aK\mathrm{e}^{ax} = ag(x)$. g est donc solution de l'équation $y' = ay$.

Donc les solutions de l'équation $y' = ay$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = K\mathrm{e}^{ax}$, avec $K \in \mathbb{R}$.

2. (E) : $y' = 2y + \cos x$.

a. $f_0(x) = a\cos x + b\sin x$. f_0 somme de fonctions dérivables est dérivable et $f_0'(x) = -a\sin x + b\cos x$.

f_0 est solution de (E) si et seulement si :

$f_0'(x) = 2f_0(x) + \cos x \iff -a\sin x + b\cos x = 2(a\cos x + b\sin x) + \cos x \iff (a+2b)\sin x + (2a - b + 1)\cos x = 0$ quel que soit x réel.

Pour que cette égalité soit vérifiée, il suffit que

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2a - b + 1 & = & 0 \\ a + 2b & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 2a - b & = & -1 \\ a & = & -2b \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} -5b & = & -1 \\ a & = & -2b \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} b & = & \dfrac{1}{5} \\ a & = & -\dfrac{2}{5} \end{array}\right.$$. Conclusion : la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$f_0(x) = -\dfrac{2}{5}\cos x + \dfrac{1}{5}\sin x$ est une solution de (E).

b. D'après **1. c.** Les solutions de l'équation différentielle (E_0) : $y' = 2y$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = K\mathrm{e}^{2x}$, $K \in \mathbb{R}$.

c. f est solution de (E) si et seulement si , pour tout réel x, (1) : $f'(x) = 2f(x) + \cos x$. Comme f_0 est aussi solution de (E), on a $f_0'(x) = f_0(x) + \cos x$:

Par différence membres à membres

$$(1) \iff f'(x) - f_0'(x) = 2\big(f(x) - f_0(x)\big)$$

et par linéarité de la dérivabilité :

$$(1) \iff \big(f(x) - f_0(x)\big)' = 2\big(f(x) - f_0(x)\big)$$

ce qui signifie que $f - f_0$ est solution de (E_0).

d. D'après **2. b.**, on a donc f est solution de (E) si et seulement si, il existe un réel K tel que, pour tout réel x,
$f(x) - f_0(x) = K\mathrm{e}^{2x} \iff f(x) = -\dfrac{2}{5}\cos x + \dfrac{1}{5}\sin x + K\mathrm{e}^{2x}$.

e. k est solution de (E), donc $k(x) = -\dfrac{2}{5}\cos x + \dfrac{1}{5}\sin x + K\mathrm{e}^{2x}$. Or
$k\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0 \iff \dfrac{1}{5} + K\mathrm{e}^{\pi} = 0 \iff K = -\dfrac{1}{5}\mathrm{e}^{-\pi}$.
On a donc $k(x) = -\dfrac{2}{5}\cos x + \dfrac{1}{5}\sin x - \dfrac{1}{5}\mathrm{e}^{2x-\pi}$.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. L'écriture complexe d'une symétrie axiale (antidéplacement) est de la forme $z' = a\overline{z} + b$. A et B invariants par cette symétrie se traduit par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} 1 & = & a \times 1 + b \\ \mathrm{i} & = & a \times (-\mathrm{i}) + b \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 1 & = & a + b \\ \mathrm{i} & = & -a(\mathrm{i}) + b \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 1 & = & a + b \\ 1 - \mathrm{i} & = & a(1+\mathrm{i}) \end{array}\right. \iff$$

$$\text{(par différence)} \left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} & = & a \\ 1 & = & a + b \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{-2\mathrm{i}}{2} & = & a \\ 1 & = & a + b \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} -\mathrm{i} & = & a \\ 1 + \mathrm{i} & = & b \end{array}\right.$$

L'écriture complexe est donc : $z' = -\mathrm{i}\overline{z} + 1 + \mathrm{i}$.

2. $f = H \circ S$.

a. La réflexion S est une similitude de centre A ; donc la composée de deux similitudes de même centre est une similitude de même centre A.

b. Écriture complexe :

– pour S, on a vu que l'écriture complexe est : $z' = -\mathrm{i}\overline{z} + 1 + \mathrm{i}$.
– pour H : $\overrightarrow{\mathrm{A}M''} = -2\overrightarrow{\mathrm{A}M'} \iff z'' - 1 = -2(z' - 1) \iff$
$z" = 1 - 2(z' - 1) = -2z' + 3$
– donc $z" = -2\left(-\mathrm{i}\overline{z} + 1 + \mathrm{i}\right) + 3 = 2\mathrm{i}\overline{z} + 1 - 2\mathrm{i}$.

Soit $M(z)$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{A}M''} = -2\overrightarrow{\mathrm{A}M} \iff z'' - 1 = -2(z - 1) \iff$
$2\mathrm{i}\overline{z} + 1 - 2\mathrm{i} - 1 = -2z + 2 \iff 2\mathrm{i}\overline{z} + 2z = 1 + 2\mathrm{i}$. (1)
En posant $z = x + \mathrm{i}y$, $2\mathrm{i}(x - \mathrm{i}y) + 2(x + \mathrm{i}y = 1 + 2\mathrm{i}(1) \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 2y + 2x & = & 2 \\ 2x + 2y & = & 2 \end{array}\right.$

Les points $M(x\ ;\ y)$ qui vérifient la relation sont tels que $x + y = 1$ qui est l'équation de la droite (AB).

Inversement un point M de la droite (AB) a pour image par S M et ensuite on a bien par la transformation h $\overrightarrow{\mathrm{A}M''} = -2\overrightarrow{\mathrm{A}M}$.

L'ensemble cherché est donc toute la droite (AB).

c. De même $\overrightarrow{\mathrm{A}M''} = 2\overrightarrow{\mathrm{A}M} \iff z'' - 1 = 2(z - 1) \iff 2\mathrm{i}\overline{z} + 1 - 2\mathrm{i} = 2z - 2 \iff$ $2\mathrm{i}\overline{z} - 2z = -3 + 2\mathrm{i}$ (2).

Si $M(x\ ;\ y)$, alors (2) $\Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 2y - 2x & = & -2 \\ 2x - 2y & = & 2 \end{array}\right.$

Les points $M(x\ ;\ y)$ sont tels que $x - y = 1$ qui est l'équation d'une droite perpendiculaire à (AB) (coefficient directeur 1, alors que celui de (AB) est -1), et qui contient le point A (le couple $(1\ ;\ 0)$ vérifie l'équation).

Inversement un point M de la perpendiculaire trouvée a pour coordonnées $(x\ ;\ x - 1)$.

On vérifie que $z'' - 1 = 2\mathrm{i}x + 2x - 2 - 2\mathrm{i}$ et que
$2(z - 1) = 2\mathrm{i}x + 2x - 2 - 2\mathrm{i}$.

L'ensemble cherché est donc toute la perpendiculaire à (AB) contenant A.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. $z_{E'} = \frac{1}{2}\left(-\text{i} + \frac{1}{-\text{i}}\right) = \frac{1}{2}\left(-\text{i} + \frac{\text{i}}{1}\right) = 0.$

E a donc pour image O.

2. $M' = M \iff z = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \iff 2z^2 = z^2 + 1 \iff z^2 = 1 \iff z = 1$ ou $z = -1$.

Les points égaux à leur image sont donc les points d'affixe 1 et -1.

3. Soit $M(z)$ avec $z \neq 0,\ z \neq 1,\ z \neq -1$.

a. $\dfrac{z'+1}{z'-1} = \dfrac{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)+1}{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)-1} = \dfrac{z+\frac{1}{z}+2}{z+\frac{1}{z}-2} = \dfrac{z^2+1+2z}{z^2+1-2z} = \dfrac{(z+1)^2}{(z-1)^2} = \left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^2.$

b. $\dfrac{z'+1}{z'-1} = \left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^2 \Rightarrow \left|\dfrac{z'+1}{z'-1}\right| = \left|\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^2\right| \iff \dfrac{|z'+1|}{|z'-1|} = \dfrac{|(z+1)^2|}{|(z-1)^2|} \iff$

$\dfrac{M'\text{B}}{M'\text{A}} = \left(\dfrac{M\text{B}}{M\text{A}}\right)^2.$

De même avec les arguments :

$\dfrac{z'+1}{z'-1} = \left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^2 \Rightarrow \left(\overrightarrow{\text{A}M'}, \overrightarrow{\text{B}M'}\right) = 2\left(\overrightarrow{\text{A}M}, \overrightarrow{\text{B}M}\right) \iff$

$\left(\overrightarrow{M'\text{A}}, \overrightarrow{M'\text{B}}\right) = 2\left(\overrightarrow{M\text{A}}, \overrightarrow{M\text{B}}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

4. **a.** $M \in \Delta \iff M\text{A} = M\text{B} \iff \dfrac{M\text{B}}{M\text{A}} = 1$. Donc d'après la question précédente : $\dfrac{M'\text{B}}{M'\text{A}} = 1 \iff M'\text{B} = M'\text{A} \iff M' \in \Delta$.

b.

- Si $M = \text{A}, M' = \text{A}$ et de même si $M = \text{B}, M' = \text{B}$, donc dans ces deux cas $M' \in [\text{AB}]$.
- Si M appartient au cercle de diamètre [AB] et $M \neq \text{A}$ et $M \neq \text{B}$, alors $\left(\overrightarrow{M\text{A}}, \overrightarrow{M\text{B}}\right) = \dfrac{\pi}{2} \quad [\pi]$.

Donc d'après la question précédente $\left(\overrightarrow{M'\text{A}}, \overrightarrow{M'\text{B}}\right) = \pi \quad [2\pi]$, donc les points A, B et M' sont alignés ou encore $M' \in (\text{AB})$. On peut même préciser que $M' \in]\text{AB}[$, donc finalement : si M appartient à Γ, alors M' appartient à [AB].

c. Inversement, tout point M' de (AB) a une affixe réelle α. M' a au moins un antécédent d'affixe $z \neq 0$ par f si, et seulement si :

$$\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \alpha \iff 2\alpha z = z^2 + 1 \iff z^2 - 2\alpha z + 1 = 0.$$

Comme $\Delta = 4\alpha^2 - 4$ cette équation admet au moins une solution complexe, non nulle.

Conclusion : tout point de (AB) a au moins un antécédent par f.

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. $M(x\,;\,y) \in (d) \iff$ il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{\text{A}M} = t\vec{u} \iff \left\{\begin{array}{lcl} x-(-2) & = & t \times 1 \\ y-8 & = & t \times 5 \\ z-4 & = & t \times (-1) \end{array}\right. \iff$

$$\left\{\begin{array}{lcr} x & = & -2+t \\ y & = & 8+5t \\ z & = & 4-t \end{array}\right.$$

2. Les plans (P) et (Q) ont respectivement pour vecteur normal $(1\ ;\ -1\ ;\ -1)$ et $(1\ ;\ 0\ ;\ -2)$ qui ne sont manifestement pas colinéaires. Ces deux plans n'étant pas parallèles sont sécants. Tout point $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ de leur droite commune vérifie :
$\left\{\begin{array}{rrrcl} x & -y & -z & = & 7\\ x & & -2z & = & 11\end{array}\right.$, soit en posant $z = t$, $\left\{\begin{array}{rrrcl} x & -y & -t & = & 7\\ x & & -2t & = & 11\\ & & z & = & t\end{array}\right. \iff$
$\left\{\begin{array}{rrrcl} x & -y & & = & 7+t\\ x & & & = & 11+2t\\ & & z & = & t\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrcl} x & & & = & 11+2t\\ & y & & = & 4+t\\ & & z & = & t\end{array}\right.$ qui est une représentation param"trique de la droite (d').

3. $\mathrm{H}(-3\,;\,3\,;\,5) \in (d) \iff \left\{\begin{array}{rcl} -3 & = & -2+t\\ 3 & = & 8+5t\\ 5 & = & 4-t\end{array}\right.$ qui a une solution évidente $t=-1$.

$\mathrm{H}'(3\ ;\ 0\ ;\ -4) \in (d') \iff \left\{\begin{array}{rrrcl} 3 & & & = & 11+2t\\ & 0 & & = & 4+t\\ & & -4 & = & t\end{array}\right.$ qui a pour solution évidente $t=-4$.

4. On a $\overrightarrow{\mathrm{HH}'}\,(6\,;\,-3\,;\,-9)$. Or $\overrightarrow{\mathrm{HH}'}\cdot\overrightarrow{u} = 6\times 1 - 3\times 5 - 9\times(-1) = 6-15+9 = 0$. Donc (HH') et (d) sont perpendiculaires ;

   La droite (d') a un vecteur directeur $\overrightarrow{v}\,(2\,;\,1\,;\,1)$ et $\overrightarrow{\mathrm{HH}'}\cdot\overrightarrow{v} = 6\times 2-3\times 1-9\times 1 = 12-3-9 = 0$. Donc (HH') et (d') sont perpendiculaires.

5. La droite (HH') est la perpendiculaire commune aux droites (d) et (d'). La distance HH' est la plus courte distance entre les droites (d) et (d').
   $\mathrm{HH}'^2 = (3+3)^2+(-3)^2(-4-5)^2 = 36+9+81 = 126$.
   D'où $\mathrm{HH}' = \sqrt{126} = \sqrt{9\times 14} = 3\sqrt{14}$.

6. $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ vérifie $\overrightarrow{M\mathrm{H}'}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HH}'} = 126 \iff (3-x)\times 6+(0-y)\times(-3)+(-4-z)\times(-9) = 126 \iff$ (en simplifiant par 3), $2(3-x)+y+3(4+z) = 42 \iff 6-2x+y+12+3z = 42 \iff -2x+y+3z = 24$ qui est l'équation d'un plan contenant H, puisque $\overrightarrow{\mathrm{HH}'}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HH}'} = 126$ (question précédente).

EXERCICE 4 — 6 points

Commun à tous les candidats

1. **a.** $f_1(x) = 2x-2+\ln\left(x^2+1\right)$. On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2+1 = +\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\ln\left(x^2+1\right) = +\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 2x-2$. Finalement par somme des limites $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = +\infty$.

   b. f_1 est une somme de fonctions dérivables et $f_1'(x) = 2+\dfrac{2x}{x^2+1}$.

   c. On a $2x \geqslant 0$, $x^2+1>0$, donc $\dfrac{2x}{x^2+1}$, et donc $f_1' \geqslant 2 > 0$.
   La fonction est donc croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.
   $f_1(0) = -2$.
   D'où le tableau de variations :

x	0		α_1		$+\infty$
$f_1'(x)$				$+$	
$f_1(x)$	-2	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2. $f_n(x) = 2x - 2 + \dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{n}$.

a. Pour n fixé, on a encore $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{n} = +\infty$, et donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.

b. $f_n'(x) = 2 + \dfrac{2x}{n\left(x^2+1\right)}$.

Comme à la question 1, tous les termes sont positifs, donc $f_n'(x) > 0$. La fonction f_n est donc croissante sur $[0~;~+\infty[$.

c. La fonction f_n est continue sur $[0~;~+\infty[$. Comme $f(0) = -2$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$ il existe un réel unique α_n tel que $f_n\left(\alpha_n\right) = 0$.

d. On a $f_n(1) = \dfrac{\ln 2}{n}$.

On a donc $-2 < 0 < 1$ ou encore $f_n(0) < f_n\left(\alpha_n\right) < f_n(1)$ d'où par croissance de la fonction f_n, $0 < \alpha_n < 1$.

3. On sait que $f_{n+1}\left(\alpha_{n+1}\right) = 0 \iff 2\alpha_{n+1} - 2 + \dfrac{\ln\left(\alpha_{n+1}^2+1\right)}{\alpha_{n+1}} = 0 \iff 2\alpha_{n+1} - 2 = -\dfrac{\ln\left(\alpha_{n+1}^2+1\right)}{\alpha_{n+1}}$ (1).

D'autre part :

$f_n\left(\alpha_{n+1}\right) = 2\alpha_{n+1} - 2 + \dfrac{\ln\left(\alpha_{n+1}^2+1\right)}{n+1} = -\dfrac{\ln\left(\alpha_{n+1}^2+1\right)}{\alpha_{n+1}} + \dfrac{\ln\left(\alpha_{n+1}^2+1\right)}{n+1}$ en utilisant (1) $= \ln\left(\alpha_{n+1}^2+1\right)\left[\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right] = \ln\left(\alpha_{n+1}^2+1\right) \times \dfrac{1}{n(n+1)}$.

Or $\alpha_{n+1}^2 \geqslant 0 \Rightarrow \alpha_{n+1}^2 + 1 \geqslant 1 \Rightarrow \ln\left(\alpha_{n+1}^2+1\right) \geqslant 0$. D'autre par $\dfrac{1}{n(n+1)} > 0$.

Conclusion $\ln\left(\alpha_{n+1}^2+1\right) \times \dfrac{1}{n(n+1)} > 0$ ou encore $f_n\left(\alpha_{n+1}\right) > 0$.

a. On vient de démontrer que $0 < f_n\left(\alpha_{n+1}\right)$ ou encore $f_n\left(\alpha_n\right) < f_n\left(\alpha_{n+1}\right)$.
D'où par croissance de la fonction f_n, $\alpha_n < \alpha_{n+1}$.
Conclusion la suite $\left(\alpha_n\right)$ est donc croissante.

b. La suite est croissante et majorée par 1 : elle donc convergente vers une limite ℓ.

c. $\alpha_n = 1 - \dfrac{\ln\left(\alpha_n^2+1\right)}{2n}$ entraîne par limite au voisinage de plus l'infini que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\ln\left(\alpha_n^2+1\right)}{2n} = 0$, d'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 1$.