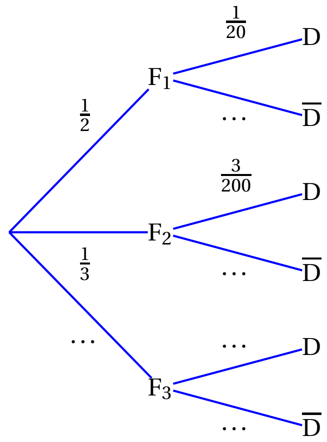
Corrigé du baccalauréat S Asie 16 juin 2009

Exercice 1 **5 points**

1. **a.** On a : $p\left(\mathrm{F}_1\right) = \dfrac{1}{2}$; $p\left(\mathrm{F}_2\right) = \dfrac{1}{3}$. Puis :

$p_{\mathrm{F}_1}(D) = \dfrac{5}{100} = \dfrac{1}{20}$; $p_{\mathrm{F}_2}(D) = \dfrac{1,5}{100} = \dfrac{15}{1000}\dfrac{3}{200}$; $p(D) = \dfrac{3,5}{100} = \dfrac{35}{1000} = \dfrac{7}{200}$.



b. Cette probabilité est égale à $p\left(\mathrm{F}_1\right) \times p_{\mathrm{F}_1}(D) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{20} = \dfrac{1}{40} = \dfrac{5}{200}$.

c. De la même façon cette probabilité est égale à (troisième branche) à $\dfrac{1}{3} \times \dfrac{3}{200} = \dfrac{1}{200}$.

d. On a $p\left(\mathrm{F}_3\right) = 1 - p\left(\mathrm{F}_1\right) - p\left(\mathrm{F}_2\right) = 1 - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}$.

D'autre part $p(D) = \dfrac{7}{200} = p\left(\mathrm{F}_1\right) \times p_{\mathrm{F}_1}(\mathrm{D}) + p\left(\mathrm{F}_2\right) \times p_{\mathrm{F}_2}(\mathrm{D}) + p\left(\mathrm{F}_3\right) \times p_{\mathrm{F}_3}(\mathrm{D}) \iff \dfrac{7}{200} = \dfrac{1}{40} + \dfrac{1}{200} + \dfrac{1}{6}p_{\mathrm{F}_3}(\mathrm{D}) \iff p_{\mathrm{F}_3}(\mathrm{D}) = 6\left[\dfrac{7}{200} - \dfrac{1}{40} - \dfrac{1}{200}\right] = 6\left[\dfrac{6}{200} - \dfrac{1}{40}\right] = 6\left[\dfrac{6}{200} - \dfrac{5}{200}\right] = \dfrac{6}{200} = \dfrac{3}{100}$.

On a donc $p\left(\mathrm{F}_3 \cap \mathrm{D}\right) = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{3}{100} = \dfrac{1}{200}$.

e. On a $p_{\mathrm{F}_3}(\mathrm{D}) = \dfrac{p\left(\mathrm{F}_3 \cap \mathrm{D}\right)}{p\left(\mathrm{F}_3\right)} = \dfrac{\frac{1}{200}}{\frac{1}{6}} = \dfrac{6}{200} = \dfrac{3}{100}$.

2. **a.** Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de chaussettes défectueuses sur un tirage de 6 chaussettes. Elle suit une loi binomiale de paramètres $n = 6$ et de probabilité $p(\mathrm{D}) = 0,035$.

Or $p(X = 2) = \dbinom{6}{2}0,035^2(1 - 0,035)^4 = 15 \times 0,035^2 \times 0,965^4 \approx 0,015934 \approx 0,016$ (au millième près).

b. Cette probabilité est égale à $p(X = 0) + p(X = 1) = \dbinom{6}{0}0,035^0(1 - 0,035)^6 + \dbinom{6}{1}0,035^1(1-0,035)^5 \approx 0,80754 + 0,175734 \approx 0,9832 \approx 0,983$ (au millième près).

EXERCICE 2 **5 points**

Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. C$(1-\text{i})$ et D$(-\text{i})$
2. **a.** Déterminer l'écriture complexe de r. $z' = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{2}}z \iff z' = \text{i}z$.
   b. OBEF étant un carré, $r(B) = F$, donc $f = \text{i}b$.
   c. On a $\overrightarrow{\text{O}B} = \overrightarrow{FE} \iff b = e - f \iff e = b + f = b + \text{i}b = b(1+\text{i})$.
3. OFGD est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{\text{O}D} = \overrightarrow{FG} \iff d = g - f \iff g = d + f = -\text{i} + \text{i}b = \text{i}(b-1)$.
4. $\dfrac{e-g}{c-g} = \dfrac{b(1+\text{i}) - \text{i}(b-1)}{1-\text{i}-\text{i}(b-1)} = \dfrac{b+\text{i}}{1-\text{i}b} = \dfrac{(b+\text{i})(1+\text{i}b)}{(1-\text{i}b)(1+\text{i}b)} = \dfrac{\text{i}\left(b^2+1\right)}{1+b^2} = \text{i}$.
   Il en résulte que $\arg\left(\dfrac{e-g}{c-g}\right) = \left(\overrightarrow{GC}, \overrightarrow{GE}\right) = \arg(\text{i}) = \dfrac{\pi}{2}$.

EXERCICE 2 **5 points**

Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. **a.** $239 = 13 \times 18 + 5 \iff 239 \equiv 5 \quad (13)$
   $239 = 17 \times 14 + 1 \iff 239 \equiv 1 \quad (17)$
   Donc 239 est solution du système.
   b. $N \equiv 5 \quad (13)$ signifie : il existe $y \in \mathbb{Z}$ tel que $N = 13y + 5$;
   De même $N \equiv 1 \quad (17)$ signifie : il existe $x \in \mathbb{Z}$ tel que $N = 17x + 1$.
   Toute solution N du système peut donc s'écrire de deux façons :
   $13y + 5 = 17x + 1$. Il en résulte que $17x + 1 - 13y - 5 = 0 \iff 17x - 13y = 4$, avec $x \in \mathbb{Z},\ y \in \mathbb{Z}$.
   c. Une solution évidente saute aux yeux : le couple $(1\ ;\ 1)$
   On a donc le système :
   $\left\{\begin{array}{lcl} 17x - 13y & = & 4 \\ 17 \times 1 - 13 \times 1 & = & 4 \end{array}\right. \Rightarrow$ (par différence
   $17(x-1) - 13(y-1) = 0 \iff 17(x-1) = 13(y-1) \quad (1)$.
   17 étant premier avec 13, il divise d'après le théorème de Gauss, $(y-1)$; il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y - 1 = 17k \iff y = 17k + 1$.
   En reportant dans l'équation (1), on obtient $17(x-1) = 13 \times 17k \iff x - 1 = 3k \iff x = 13k + 1$.
   Les couples solutions s'écrivent sous la forme $(13k + 1\ ;\ 17k + 1),\ k \in \mathbb{Z}$.
   d. On a vu que $N = 17x + 1 = 17(13k+1) + 1 = 221k + 17 + 1 = 221k + 18$.
   e. On a déjà démontré ci-dessus que $\left\{\begin{array}{lcll} N & \equiv & 5 & (13) \\ N & \equiv & 1 & (17) \end{array}\right. \Rightarrow N \equiv 18 \quad (221)$.
   Inversement : $N \equiv 18 \quad (221) \iff N = 221q + 18 =$
   $17 \times 13q + 18 = 17 \times 13q + 17 + 1 \iff N = 17(q+1) + 1 \iff N \equiv 1 \quad 17$.
   De même on peut écrire $N = 221q + 18 = 17 \times 13q + 18 = 17 \times 13q + 13 + 5 = 13(17q+1) + 5 \iff N \equiv 5 \quad [13]$.
2. **a.** La réponse est oui s'il existe un nombre N de la forme 10^k.
   D'après le petit théorème de Fermat :
   17 est premier et 10 est un entier non divisible par 17.
   On sait qu'a lors $10^{17-1} \equiv 1 \quad [17] \iff 10^{16} \equiv 1 \quad [17]$.
   b. On a vu que $10^{\ell} \equiv 18 \quad [221] \equiv \left\{\begin{array}{lcll} 10^{\ell} & \equiv & 5 & [13] \\ 10^{\ell} & \equiv & 1 & [17] \end{array}\right.$
   Or

- $10 \equiv -3 \quad [13]$
- $10^2 \equiv 9 \quad [13]$
- $10^3 \equiv -1 \quad [13]$
- $10^4 \equiv 3 \quad [13]$
- $10^5 \equiv 4 \quad [13]$
- $10^6 \equiv 1 \quad [13]$

Dans la division par 13, tous les nombres 10^{ℓ} ont donc comme reste : -3 ; -1 ; 3 ; 4 ; 9, mais jamais 5.

Conclusion : il n'existe pas d'entier ℓ tel que $10^{\ell} \equiv 18 \quad [221]$.

EXERCICE 3 **6 points**

Partie A : existence et unicité de la solution

1. f est une somme de fonctions dérivables sur $]0~;~+\infty[$: elle est donc dérivable sur $]0~;~+\infty[$ et $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{x} \geqslant 1 > 0$.
   La fonction f est donc croissante sur $]0~;~+\infty[$.
2. On a :
   - $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$;
   - $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

   Comme la fonction f est croissante sur $]0~;~+\infty[$ il existe un réel unique $\alpha > 0$ tel que $f(\alpha) = 0$.
3. $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2} + \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2} - \ln 2 < 0$.
   $f(1) = 1 + \ln 1 = 1 + 0 = 1 > 0$.
   On a : $f\left(\dfrac{1}{2}\right) < 0,\ f(1) > 0$ et f croissante sur $\left[\dfrac{1}{2}~;~1\right]$, donc
   $\dfrac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Partie B : encadrement de la solution α

1. Étude de quelques propriétés de la fonction g.
   - **a.** g est une différence de fonctions dérivables sur $]0~;~+\infty[$; elle est donc dérivable et $f'(x) = \dfrac{1}{5}\left(4 - \dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{5}\dfrac{4x-1}{x}$ qui est du signe de $4x - 1$, donc négative sur $\left]0~;~\dfrac{1}{4}\right]$ et positive sur $\left[\dfrac{1}{4}~;~+\infty\right[$.
     g est donc décroissante sur $\left]0~;~\dfrac{1}{4}\right]$, puis croissante.
   - **b.** Sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}~;~1\right]$, on vient de voir que g est croissante. Donc :
     $\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow g\left(\dfrac{1}{2}\right) \leqslant g(x) \leqslant g(1)$.
     Or $g\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2 - \ln\frac{1}{2}}{5} = \dfrac{2 + \ln 2}{5} \approx 0,53 > 0,5$ et $g(1) = \dfrac{4 - \ln 1}{5} = \dfrac{4}{5} < 1$.
     Conclusion : $\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow \dfrac{1}{2} \leqslant g(x) \leqslant 1$.

c. On a (E) $\quad: g(x) = x \iff \dfrac{4x - \ln x}{5} = x \iff 4x - \ln x = 5x \iff x + \ln x = 0 \iff f(x) = 0$.

2. **a.** Initialisation : $u_0 = \dfrac{1}{2}$, on a vu que $u_1 = g(u_0) \approx 0,53$.

Donc $\dfrac{1}{2} \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 1$.

Hérédité : supposons qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{1}{2} \leqslant u_p \leqslant u_{p+1} \leqslant 1$.

D'une part $\dfrac{1}{2} \leqslant u_p \leqslant 1 \Rightarrow \dfrac{1}{2} \leqslant g\left(u_p\right) \leqslant 1$ soit $\dfrac{1}{2} \leqslant u_{p+1} \leqslant 1$.

D'autre part par croissance de la fonction g :

$u_p \leqslant u_{p+1} \Rightarrow g\left(u_p\right) \leqslant g\left(u_{p+1}\right)$, soit $u_{p+1} \leqslant u_{p+2}$.

La démonstration par récurrence est achevée.

b. On vient donc de démontrer que la suite (u_n) croissante et majorée par 1 converge vers une limite $\ell \leqslant 1$.

On a $u_{n+1} = g(u_n)$. La fonction étant continue sur $\left[\dfrac{1}{2}\,;\,1\right]$, la limite ℓ vérifie : $\ell = g(\ell)$ c'est-à-dire d'après la question **1. c.** vérifie $x + \ln x = 0 \iff f(x) = 0$, dont l'unique solution est α.

Conclusion : la suite (u_n) converge vers α.

3. **a.** La calculatrice donne $u_{10} \approx 0{,}567\,124$ à 10^{-6} près.

b. On admet que :

$0{,}567\,124 \leqslant \alpha \leqslant u_{10} + 5 \times 10^{-4}$, soit $0{,}567\,124 \leqslant \alpha \leqslant 0{,}567\,524$.

Donc au millième près : $0,567 \leqslant \alpha \leqslant 0,568$.

EXERCICE 4 — 4 points

1. La fonction constante $x \mapsto 3$ est solution de l'équation et les solutions de l'équation $y' + 2y = 0$ sont de la forme $x \mapsto K\mathrm{e}^{-2x}$.

Les solutions sont donc de la forme : $f(x) = K\mathrm{e}^{-2x} + 3$. Or $f(0) = 1 \iff K + 3 = 0 \iff K = -2$. Donc réponse (1).

2. G, I et A sont alignés si G est le barycentre de I et A, ou encore par associativité le barycentre de (B, 2), (C, 1) et A.

La bonne réponse est la (3).

3. La perpendiculaire à $\mathscr{P}$ contenant A a pour équations paramétriques :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2 + 1t \\ y & = & 3 - 3t \\ z & = & -1 + 2t \end{array}\right., \ t \in \mathbb{R}$$

Le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{P}$ est donc le point commun à cette droite et à $\mathscr{P}$. Ses coordonnées vérifient donc le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2 + 1t \\ y & = & 3 - 3t \\ z & = & -1 + 2t \\ x - 3y + 2z & = & 5 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2 + 1t \\ y & = & 3 - 3t \\ z & = & -1 + 2t \\ 2 + t - 3(3 - 3t) + 2(-1 + 2t) & = & 5 \end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2 + 1t \\ y & = & 3 - 3t \\ z & = & -1 + 2t \\ 14t & = & 14 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3 \\ y & = & 0 \\ z & = & 1 \\ t & = & 1 \end{array}\right.$$

Réponse (3)

4. Question 4

La valeur moyenne de la fonction f est :

$m = \frac{1}{-}\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{dx}$.

Cette intégrale ne peut être calculée, mais sur $[0\,;\,1]$:

$0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant x^2 \leqslant 1 \Rightarrow 1 \leqslant 1+x^2 \leqslant 2 \iff \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{1+x^2} \leqslant 1$.

Ces fonctions étant positives, on obtient en intégrant sur $[0\,;\,1]$:

$\int_0^1 \frac{1}{2}\,\mathrm{dx} \leqslant \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{dx} \leqslant \int_0^1 1\,\mathrm{dx}$, soit $\frac{1}{2} \leqslant m \leqslant 1$.

Or $\frac{\pi}{2} \approx 1,57$, donc la seule réponse possible est la réponse (2).