

Durée : 4 heures

Corrigaccalauréat S Centres étrangers 15 juin 2009

EXERCICE 1

5 points

1. Restitution organisée de connaissances :

- a. Démontrer que $p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \bar{A})$.
- b. Démontrer que, si les événements A et B sont indépendants pour la probabilité p , alors les événements \bar{A} et B le sont également.

2. a. Il faut calculer $p(\bar{R} \cap S)$.

Les événements R et S étant manifestements indépendants, \bar{R} et S le sont aussi.

$$\text{Donc } p(\bar{R} \cap S) = p(\bar{R}) \times p(S) = (1 - 0,1) \times 0,05 = 0,9 \times 0,05 = 0,045.$$

- b. Il faut que Stéphane entende son réveil et que son scooter marche. La probabilité qu'il soit à l'heure est donc égale à $p(\bar{R} \cap \bar{S})$.

D'après la propriété démontrée au-dessus \bar{R} et \bar{S} sont indépendants, donc

$$p(\bar{R} \cap \bar{S}) = p(\bar{R}) \times p(\bar{S}) = (1 - 0,1) \times (1 - 0,05) = 0,9 \times 0,95 = 0,855.$$

- c. Si X est la variable aléatoire correspondant au nombre de fois où Stéphane entend son réveil, X suit une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,9$.

La probabilité que Stéphane entende le réveil au moins quatre fois est :

$$p(X = 4) + p(X = 5) = \binom{5}{4} \times 0,9^4 \times 0,1 + \binom{5}{5} \times 0,9^5 \times 0,1^0 = 0,5 \times 0,9^4 + 0,9^5 = 0,9^4 \times 1,9 = 0,91854 \approx 0,9185.$$

EXERCICE 2

5 points

1.

2. $\vec{OA}(3; 4; 0)$, d'où $OA^2 = 9 + 16 = 25$;

$\vec{OC}(0; 0; 5)$, d'où $OC^2 = 25$;

$\vec{AC}(-3; -4; 5)$, d'où $AC^2 = 9 + 16 + 25 = 50$;

$\vec{OB}(0; 5; 0)$, d'où $OB^2 = 25$;

$\vec{BC}(0; -5; 5)$, d'où $BC^2 = 25 + 25 = 50$;

On a donc $25 + 25 = 50 \iff OA^2 + OC^2 = AC^2 \iff$ (OAC est un triangle rectangle en O et isocèle car $OA^2 = OC^2 = OC^2$).

De même $25 + 25 = 50 \iff OB^2 + OC^2 = BC^2 \iff$ (OBC est un triangle rectangle en O et isocèle car $OB^2 = OC^2$. Quelle est la nature du triangle ABC ?

3. Soit H le point de coordonnées $\left(\frac{15}{19}; \frac{45}{19}; \frac{45}{19}\right)$.

a. $I\left(\frac{3}{2}; \frac{9}{2}; 0\right)$.

$$\vec{HC}\left(-\frac{15}{19}; \frac{45}{19}; 5 - \frac{45}{19}\right) \text{ ou encore } \vec{HC}\left(-\frac{15}{19}; \frac{45}{19}; \frac{50}{19}\right);$$

$$\overrightarrow{CI} \left(\frac{3}{2}; \frac{9}{2}; -5 \right).$$

En comparant les dernières coordonnées de ces deux vecteurs, on constate que $\overrightarrow{HC} = -\frac{10}{19}\overrightarrow{CI}$, c'est-à-dire que ces vecteurs sont colinéaires, ou encore que les points H, C et I sont alignés.

- b. I milieu de [AB] appartient au plan (ABC), donc le point H aligné avec I et C aussi.

$$\text{D'autre part } \overrightarrow{OH} \left(\frac{15}{19}; \frac{45}{19}; \frac{45}{19} \right) \text{ et } \overrightarrow{BA} (3; -1; 0).$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{BA} = \frac{45}{19} - \frac{45}{19} = 0, \text{ donc ces vecteurs sont orthogonaux.}$$

$$\overrightarrow{BC} (0; -5; 5), \text{ donc } \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{45}{19} - \frac{45}{19} : \text{ ces vecteurs sont orthogonaux.}$$

Conclusion : \overrightarrow{OH} , orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) est orthogonal à ce plan et O a pour projeté orthogonal sur ce plan le point H.

- c. Il en résulte qu'une équation du plan (ABC) est $\frac{15}{19}x + \frac{45}{19}y + \frac{45}{19}z + d = 0 \iff x + 3y + 3z + d' = 0$.

$$\text{Or } C(0; 0; 5) \in (ABC) \iff 15 + d' = 0 \iff d' = -15.$$

Une équation du plan (ABC) est donc :

$$M(x; y; z) \in (ABC) \iff x + 3y + 3z - 15 = 0$$

4. Calculs d'aire et de volume.

- a. On a vu que OAC et OBC sont isocèles en O ; on a donc $OA = OC = OB$; le triangle OAB est donc isocèle en O. I milieu de [AB] est donc le pied de la hauteur issue de O.

$$\text{L'aire du triangle OAB est donc : } \frac{OI_{AB} \times OI}{2}.$$

$$\text{On a } AB^2 = 10, \text{ donc } AB = \sqrt{10}; OI^2 = \frac{9}{4} + \frac{81}{4} = \frac{90}{4}, \text{ donc } OI = \frac{3\sqrt{10}}{2}.$$

$$\text{L'aire est donc égale à : } \frac{\sqrt{10} \times \frac{3\sqrt{10}}{2}}{2} = \frac{15}{2}.$$

On a démontré que (OC) est perpendiculaire à (OA) et à (OB), donc la droite (OC) est orthogonale au plan (OAB). [OC] est donc la hauteur relative à la base (OAB) et le volume du tétraèdre est donc :

$$V = \frac{\mathcal{A}(OAB) \times OC}{3} = \frac{\frac{15}{2} \times 5}{3} = \frac{25}{2}.$$

- b. On a vu que cette distance est égale à OH.

$$OH^2 = \left(\frac{25}{19} \right)^2 + \left(\frac{45}{19} \right)^2 + \left(\frac{45}{19} \right)^2 = \frac{225 + 2025 + 2025}{19^2} = \frac{4275}{19^2}, \text{ d'où}$$

$$OH = \frac{15\sqrt{19}}{19}.$$

- c. D'après ce qui a été démontré au dessus [OH] est la hauteur issue de O dans le tétraèdre OABC ; donc le volume du tétraèdre OABC peut également s'écrire $\frac{\mathcal{A}(ABC) \times OH}{3}$.

$$\text{Donc } \frac{25}{2} = \mathcal{A}(ABC) \times \frac{15\sqrt{19}}{19} \times \frac{1}{3}, \text{ d'où } \mathcal{A}(ABC) = \frac{25}{2} \times \frac{19}{15\sqrt{19}} = \frac{5\sqrt{19}}{2}.$$

EXERCICE 2

Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

5 points

1. a. Le couple (9; 1) est une solution relativement évidente de l'équation car $3 \times 9 + 2 \times 1 = 29$.

$$\text{b. } \begin{cases} 3x + 2y = 29 \\ 3 \times 9 + 2 \times 1 = 29 \end{cases} \Rightarrow (\text{par différence}) 3(x - 9) = 2(y - 1) = 0 \Leftrightarrow 3(x - 9) = 2(1 - y) \quad (1).$$

Comme 3 est premier avec 2, d'après le théorème de Gauss, 3 divise $1 - y$. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $1 - y = 3k \Leftrightarrow y = 1 - 3k$.

En reportant dans l'égalité (1), on obtient $3(x - 9) = 2 \times 3k \Leftrightarrow (x - 9) = 2k \Leftrightarrow x = 9 + 2k$.

Vérification : quel que soit l'entier k , $3(9 + 2k) + 2(1 - 3k) = 27 + 2 = 29$.

L'ensemble des couples est donc $\{(9 + 2k; 1 - 3k), k \in \mathbb{Z}\}$.

- c. On a $x \geq 0, y \geq 0 \Leftrightarrow 9 + 2k \geq 0, 1 - 3k \geq 0 \Leftrightarrow k \geq -\frac{9}{2}$ et $x \leq \frac{1}{3}$.

Les valeurs possibles pour k sont donc : $-4; -3; -2; -1; 0$ ce qui correspond aux couples solutions : (1; 13), (3; 10), (5; 7), (7; 4) et (9; 1) déjà trouvé.

- a. On sait qu'un vecteur \vec{n} normal au plan \mathcal{P} a pour coordonnées (3; 2; 0) et \vec{k} (0; 0; 1). Donc $\vec{n} \cdot \vec{k} = 0$. \vec{k} et \vec{n} sont orthogonaux, ce qui montre que \mathcal{P} est parallèle à l'axe (Oz).

- b. • L'axe (Ox) est défini par le système $y = 0$ et $z = 0$; les points communs à \mathcal{P} et à (Ox) vérifient donc :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 29 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{29}{3}. \text{ Le point commun a donc pour coordonnées } \left(\frac{29}{3}; 0; 0\right).$$

- L'axe (Oy) est défini par le système $x = 0$ et $z = 0$; les points communs à \mathcal{P} et à (Oy) vérifient donc :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 29 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{29}{2}. \text{ Le point commun a donc pour coordonnées } \left(0; \frac{29}{2}; 0\right).$$

- c. cf. figure

- d. Ces points correspondent aux couples solutions de l'équation initiale avec des termes positifs, soient les points :

(1; 13; 0), (3; 10; 0), (5; 7; 0), (7; 4; 0) et (9; 1; 0)

2. a. Les points de cette section ont des coordonnées qui vérifient $\begin{cases} 4z = xy \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow xy = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $y = 0$.

La réponse est la figure n° 3.

- b. Les points de cette section ont des coordonnées qui vérifient $\begin{cases} 4z = xy \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow xy = 4 \Rightarrow y = \frac{4}{x}$. On reconnaît l'équation d'une hyperbole.

La réponse est la figure n° 1.

- c. Les points de cette section ont des coordonnées qui vérifient $\begin{cases} 4z = xy \\ y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4z = 8x \\ y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2x \\ y = 8 \end{cases}$

On reconnaît l'équation d'une droite de coefficient directeur 2.

La réponse est la figure n° 4.

- d. Les points de cette section ont des coordonnées qui vérifient $\begin{cases} 4z & = & xy \\ 3x + 2y & = & 29 \end{cases}$

On a trouvé à la question précédente les points dont les coordonnées vérifient la deuxième équation :

- $x = 1, y = 13 \Rightarrow 4z = 13 \Leftrightarrow z = \frac{13}{4}$;
- $x = 3, y = 10 \Rightarrow 4z = 30 \Leftrightarrow z = \frac{15}{2}$;
- $x = 5, y = 7 \Rightarrow 4z = 35 \Leftrightarrow z = \frac{35}{4}$;
- $x = 7, y = 4 \Rightarrow 4z = 28 \Leftrightarrow z = 7$;
- $x = 9, y = 1 \Rightarrow 4z = 9 \Leftrightarrow z = \frac{9}{4}$.

EXERCICE 3**4 points**

1. Si $z = x + iy$, alors $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$.
Alors $\operatorname{Re}(z^2) = x^2 - y^2$ et $(\operatorname{Re}(z))^2 = x^2$.
La proposition est fautive.
2. Les trois points appartiennent à un même cercle de centre si et seulement si leur modules sont égaux.
Or $|\bar{z}| = |z|$ et $\left| \frac{z^2}{\bar{z}} \right| = \frac{|z^2|}{|z|} = \frac{|z|^2}{|z|} = |z|$.
La proposition est vraie.
3. On a $|1 + iz| = |1 - iz| \Leftrightarrow |iz - (-1)| = |iz - 1|$ qui signifie que le point d'affixe iz est équidistant des points d'affixe 1 et -1 . Ces points étant sur l'axe des abscisses et symétriques autour de O, il en résulte que le point d'affixe iz est sur l'axe des ordonnées, ou encore $iz = i\alpha (\alpha \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow z = \alpha$.
La proposition est vraie.
4. Soit P le point tel que $OMPM'$ soit un parallélogramme.
On a $z + z' = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OP}$;
De même $z - z' = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{M'O} = \overrightarrow{M'M}$.
Donc $|z + z'| = |z - z'| \Leftrightarrow OP = M'M$.
Donc le parallélogramme $OMPM'$ a ses diagonales de même longueur, autrement dit c'est un rectangle et donc les droites (OM) et (OM') sont perpendiculaires.
La proposition est vraie.

EXERCICE 4**6 points****Commun à tous les candidats****Partie A :**

1. Soient n et p deux naturels distincts.
 $f_n(x) = f_p(x) \Leftrightarrow \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} = \frac{e^{-px}}{1+e^{-x}} \Leftrightarrow e^{-nx} = e^{-px}$ (car $1+e^{-x} > 0$) $\Leftrightarrow -nx = -px$ (par croissance de la fonction \ln) $\Leftrightarrow x = 0$ (car $n \neq p$).
Quelque soit $n \in \mathbb{N}$, $f_n(0) = \frac{e^0}{1+e^0} = \frac{1}{2}$.
Toutes les courbes \mathcal{C}_n contiennent le point $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

2. Étude de la fonction f_0

a. $f_0(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$.

Cette fonction est dérivable sur \mathbb{R} et $f_0'(x) = -\frac{-e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$.

Comme $e^{-x} > 0$ et $(1+e^{-x})^2 > 0$, on en déduit que $f_0'(x) > 0$.

La fonction f_0 est donc croissante sur \mathbb{R} .

b. On sait que $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$. Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$.

Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_0(x) = 0$. Ceci signifie que l'axe des abscisses est asymptote à la courbe \mathcal{C}_0 au voisinage de $-\infty$.

On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_0(x) = 1$.

Ceci signifie que la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à la courbe \mathcal{C}_0 au voisinage de $+\infty$.

c. Tableau très simple : sur \mathbb{R} , f_0 croît de 0 à 1.

3. Étude de la fonction f_1

a. On a $f_1(-x) = \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1}{e^{-x}+1} = f_0(x)$ en multipliant chaque terme par le facteur non nul e^{-x} .

b. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(-x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f_0(x) = 1$

De même $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(-x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f_0(x) = 0$.

Comme $f_0(x) = f_1(-x)$, f_0 fonction croissante est la composée de f_1 et de la fonction $x \mapsto -x$ qui est décroissante. Il en résulte que f_1 est décroissante sur \mathbb{R} .

c. $f_0(x) = f_1(-x)$ signifie que deux points d'abscisses de \mathcal{C}_0 et \mathcal{C}_1 ont la même ordonnée : ces points sont symétriques autour de (Oy) .

\mathcal{C}_0 et \mathcal{C}_1 sont symétriques autour de l'axe des ordonnées.

4. Étude de la fonction f_n pour $n \geq 2$

a. $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}$. En multipliant chaque terme par $e^{nx} > 0$, $f_n(x) = \frac{1}{e^{nx} + e^{(n-1)x}}$.

b. Pour $p \geq 2$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{px} = +\infty$, donc en utilisant l'écriture du a., $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$.

Limite en $-\infty$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{nx} = 0_+$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{(n-1)x} = 0_+$ donc par limite de l'inverse $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = +\infty$

c. f_n quotient de sommes de fonctions dérivables est dérivable car $e^{nx} + e^{(n-1)x} > 0$.

En utilisant l'écriture trouvée au début de la question :

$$f_n'(x) = -\frac{ne^{nx} + (n-1)e^{(n-1)x}}{(e^{nx} + e^{(n-1)x})^2}.$$

Comme $n \geq 2$, cette dérivée est négative quel que soit x réel. Les fonctions ($f_n, n \geq 2$) sont donc décroissantes de $+\infty$ à 0.

Partie B : Étude d'une suite liée aux fonctions f_n

1. $u_1(x) = \int_0^1 f_1(x) dx = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx$.

En posant $u(x) = 1+e^{-x}$, $u'(x) = -e^{-x}$, on remarque que la fonction à intégrer est $-\frac{u'(x)}{u(x)}$ dont une primitive est la fonction $-\ln(1+e^{-x})$.

Donc $u_1(x) = [-\ln(1+e^{-x})]_0^1 = -\ln(1+e^{-1}) + \ln 2$.

2. On a la suite d'inéquations :

$$e^{-x} > 0 \iff 1 + e^{-x} > 1 \iff 0 < \frac{1}{1 + e^{-x}} < 1 \iff 0 < \frac{e^{-nx}}{1 + e^{-x}} < e^{-nx}.$$

En intégrant ces trois fonctions sur $[0; 1]$:

$$0 < \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1 + e^{-x}} dx < \int_0^1 e^{-nx} dx \iff 0 < u_n < \int_0^1 e^{-nx} dx.$$

$$3. \int_0^1 e^{-nx} dx = \left[-\frac{1}{n} e^{-nx} \right]_0^1 = -\frac{1}{n} (e^{-n} - 1) = \frac{1}{n} (1 - e^{-n}).$$

Par limite au voisinage de $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - e^{-x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \text{donc par produit :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} (1 - e^{-x}) = 0.$$

En utilisant l'encadrement de la question 2., et d'après le théorème des « gardarmes », on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n = 0$. La suite est donc convergente.