Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat S Amérique du Sud novembre 2008

EXERCICE 1 **5 points**

1. $\text{AB}^2 = |b - a|^2 = |2 + \text{i}|^2 = 4 + 1 = 5$;
$\text{AC}^2 = |c - a|^2 = |1 + 2\text{i}|^2 = 1 + 4 = 5$.
$\text{AB}^2 = \text{AC}^2 \iff \text{AB} = \text{AC} \iff$ ABC est isocèle en A.

2. $Z_I = \dfrac{1}{2} + \text{i}\dfrac{7}{2}$.

a. $\dfrac{z - z_\text{I}}{z - a}$ est un réel si et seulement si $\arg\left(\dfrac{z - z_\text{I}}{z - a}\right) = 0 \iff \left(\overrightarrow{\text{A}M}, \overrightarrow{\text{I}M}\right) = 0 \quad [2\pi]$, ce qui signifie que les points A, I et M sont alignés.
Les points M appartiennent donc à la droite (IA) privée du point A.

b. D'après la question précédente le réel solution est l'abscisse du point commun à la droite (AI) et à l'axe des abscisses. L'équation de la droite (AI) est $y = x + 3$, donc $y = 0$ entraîne $x = -3$.

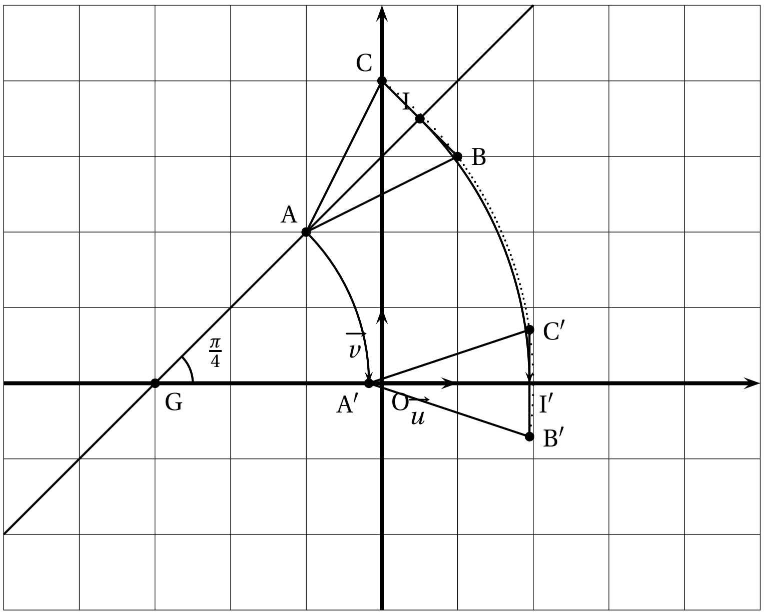
c. $z_{\overrightarrow{\text{AI}}} = z_\text{I} - a = \dfrac{1}{2} + \text{i}\dfrac{7}{2} + 1 - 2\text{i} = \dfrac{3}{2} + \text{i}\dfrac{3}{2}$.
On a $\text{AI}^2 = \dfrac{9}{4} + \dfrac{9}{4} = \dfrac{18}{4}$. Donc $\text{AI} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.
On peut donc écrire $z_{\overrightarrow{\text{AI}}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \text{i}\sin\frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}$.

3. a. Le point G a pour abscisse le réel solution de la question précédente. C'est donc un point de la droite (AI) contenant le sommet principal A et le milieu du côté opposé du triangle isocèle. Cette droite (AI) est donc hauteur, médiane, médiatrice et axe de symétrie du triangle ABC.
On a vu que l'équation de (AI) est $y = x + 3$; le coefficient directeur de cette droite est égal à 1, ce qui correspond à un angle $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\text{AI}}\right)$ de $\dfrac{\pi}{4}$.
Il existe donc deux rotations de centre G qui transforment A et I en deux points de l'axe des réels :

– La rotation r_1 d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$;
– La rotation r_2 d'angle $\dfrac{3\pi}{4}$.

r_1 est bien la première rotation de la question précédente.
Son écriture complexe est : $z' - z_\text{G} = \text{e}^{\text{i}\left(-\frac{\pi}{4}\right)}(z - z_\text{G})$ soit $z' - (-3) = \text{e}^{\text{i}\left(-\frac{\pi}{4}\right)}(z - (-3))$.
$z' = -3 + \text{e}^{\text{i}\left(-\frac{\pi}{4}\right)}(z + 3)$

4. Une rotation conserve les longueurs et les angles ; donc l'image de (AI) axe de symétrie de (ABC) est l'axe de symétrie de A′B′C′ soit A′I′.
Donc B′ et C′ sont symétriques autour de l'axe des abscisses et donc sans calcul, $b' = \overline{c'}$.



EXERCICE 2 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. F(1 ; 0 ; 1), G(1 ; 2 ; 1), H(0 ; 2 ; 1)
2. **a.** Le volume V est égal à : $\dfrac{\mathscr{A}(\text{FGH}) \times \text{AE}}{3}$.

   FGH est un triangle rectangle en G, donc $\mathscr{A}(\text{FGH}) = \dfrac{\text{FG} \times \text{GH}}{2} = \dfrac{2 \times 1}{2} = 1$ et comme AE = 1, $V = \dfrac{1 \times 1}{3} = \dfrac{1}{3}$.

   b. On a I(0 ; 1 ; 0), $\overrightarrow{\text{FI}} = (-1\ ;\ 1\ ;\ -1)$, $\overrightarrow{\text{IH}}\ (0;\ ;\ 1\ ;\ 1)$, $\overrightarrow{\text{FI}} \cdot \overrightarrow{\text{IH}} = 0 + 1 - 1 = 0$. Les vecteurs sont orthogonaux donc (FI) et (IH) sont perpendiculaires en I.
   En prenant comme base le triangle FIH, $V = \dfrac{\text{FIH} \times d}{3}$, d étant la distance du point G au plan (FIH). Le triangle FIH étant rectangle en I, son aire est égale à $\dfrac{\text{FI} \times \text{IH}}{2}$.
   $\text{FI}^2 = 1 + 1 + 1 = 3 \Rightarrow \text{FI} = \sqrt{3}$;
   $\text{IH}^2 = 0 + 1 + 1 = 2 \Rightarrow \text{IH} = \sqrt{2}$.
   $\mathscr{A}_{\text{FIH}} = \dfrac{\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.
   En reprenant l'écriture de V : $\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{\sqrt{6}}{2} \times d \iff d\dfrac{2}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.
3. **a.** On calcule :
   $\vec{n} \cdot \overrightarrow{\text{FI}} = -2 + 1 + 1 = 0$.
   $\vec{n} \cdot \overrightarrow{\text{IH}} = 0 + 1 - 1 = 0$.
   $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de (FIH) est orthogonal à ce plan.

   b. L'équation du plan (FIH) est donc de la forme : $2x + 1y - 1z + d' = 0$.
   Comme F ∈ (FIH) ses coordonnées vérifient l'équation ci-dessus soit :
   $0 + 1 - 0 + d' = 0 \iff d' = -1$.
   Une équation du plan (FIH) est donc :

$$M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (\text{FIH}) \iff 2x + y - z - 1 = 0$$

c. On sait que la distance d de G au plan (FIH) est : $\dfrac{|2x_G + y_G - z_G - 1|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}} = \dfrac{|2+2-1-1|}{\sqrt{6}} = \dfrac{2}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$. On retrouve la même valeur qu' au **2. b.**

4. **a.** (AG) est perpendiculaire au plan (FIH) si et seulement si $\overrightarrow{AG}$ est colinéaire à $\overrightarrow{n}$. Or $\overrightarrow{AG}(1\,;\,2\,;\,1)$ qui n'est manifestement pas colinéaire à $\overrightarrow{n}$.

b. $M(x\,;\,;y\,;\,z) \in (AG) \iff \overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AG}$ qui se traduit par :

$M(x\,;\,y\,;\,z) \in (AG) \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& t\\ y &=& 2t\\ z &=& t\end{array}\right.$

c. Il faut résoudre le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& t\\ y &=& 2t\\ z &=& t\\ 2x+y-z-1 &=& 0\end{array}\right. \Rightarrow 2t+2t-t-1=0 \iff 3t=1 \iff t=\frac{1}{3}$$

Les coordonnées de K sont donc $\left(\frac{1}{3}\,;\,\frac{2}{3}\,;\,\frac{1}{3}\right)$.

5. Le rayon de la sphère est GK.

Or $GK^2 = \frac{4}{9}+\frac{16}{9}+\frac{4}{9} = \frac{24}{9} \Rightarrow GK = \sqrt{\frac{24}{9}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Or la distance d de G au plan (FIH) est égale à $\frac{\sqrt{6}}{3}$; elle est donc inférieure au rayon de la sphère et par conséquent la section de la sphère par le plan (FIH) est un cercle.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. **a.** On sait que l'équation paramétrique de la droite D' est celle d'une droite contenant le point (0; 0; -2) et de vecteur directeur $\overrightarrow{u'}(1\,;\,-1\,;\,0)$.

Or $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u'} = 1-1+0=0$: les vecteurs directeurs des deux droites sont orthogonaux; les droites D et D' sont perpendiculaires.

Le point A est commun aux deux droites D et D'. S'il existe un plan contenant A et défini par les deux vecteurs $\overrightarrow{u}\, et \overrightarrow{u'}$, un vecteur $\overrightarrow{n}(a\,;\,b\,;\,c)$ normal à ce plan est orthogonal à chaque vecteur $\overrightarrow{u}\, et \overrightarrow{u'}$; donc

$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{u} = 0 \iff a+b=0$ et

$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{u'} = 0 \iff a-b=0$.

On en déduit aussitôt que $a=b=0$ et $\overrightarrow{n}(0\,;\,0\,;\,c)$. Donc une équation de ce plan est $z=k$ soit $z=2$ puisque A appartient à ce plan horizontal.

Ceci est impossible puisque tous les points de D' ont pour cote -2.

Conclusion : les droites D et D' ne sont pas coplanaires.

b. $M(x\,;\,y\,;\,z) in D' \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 0+1t\\ y &=& 0+1t\\ z &=& 2+0t\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x &=& t\\ y &=& t\\ z=2 && \end{array}\right.$.

On a : $\left\{\begin{array}{l} (MH)\perp D\\ H\in D\end{array}\right.$.

Avec $H\left(x_H\,;\,y_H\,;\,z_H\right)$ ce système se traduit par :

$$\begin{cases} x_H - x + y_H - y = 0 \\ x_H = t \\ y_H = t \\ z_H = 2 \end{cases} \Rightarrow t - x + t - y = 0 \iff t = \frac{x+y}{2}.$$

Donc $\overrightarrow{MH}\left(x_H - x\,;\, y_H - y\,;\, z_H - z\right)$ ou encore

$\overrightarrow{MH}\left(\dfrac{y-x}{2}\,;\, \dfrac{x-y}{2}\,;\, 2-z\right)$.

On en déduit :

$MH^2 = \left(\dfrac{y-x}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{x-y}{2}\right)^2 + (2-z)^2 = \dfrac{x^2+y^2-2xy}{2} + (2-z)^2.$

c. M de coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ appartient à S si et seulement si $MH = MK \iff MH^2 = MK^2 \iff \dfrac{x^2+y^2-2xy}{2} + (2-z)^2 = \dfrac{(x+y)^2}{2} + (2+z)^2 \iff x^2+y^2-2xy+8+2z^2-8z+x^2+y^2-2xy+8+2z^2+8z \iff 16z = -4xy \iff z = -\dfrac{xy}{4}$.

2. **a.** Le plan a pour équation $z = 0$; les points de la section ont leurs coordonnées qui vérifient :

$$\begin{cases} z = 0 \\ z = -\frac{1}{4}xy \end{cases} \iff \begin{cases} z = 0 \\ xy = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

La section se compose de l'axe des abscisses et de l'axe des ordonnées.

b. Un plan parallèle à $(x\mathrm{O}y)$ a une équation de la forme $z = k,\ k \in \mathbb{R}$; les points de la section ont leurs coordonnées qui vérifient :

$$\begin{cases} z = k \\ z = -\frac{1}{4}xy \end{cases} \iff \begin{cases} z = k \\ xy = -4k \end{cases} \iff \begin{cases} y = -\frac{4k}{x} \\ z = k \end{cases} \text{ si } x \neq 0.$$

La section est donc une hyperbole

c. Les points de la section ont leurs coordonnées qui vérifient :

$$\begin{cases} x+y = 0 \\ z = -\frac{1}{4}xy \end{cases} \iff \begin{cases} y = -x \\ z = \frac{1}{4}x^2 \end{cases}$$

La section est donc ici une parabole.

EXERCICE 3 — 3 points

1.

$$f(x) = \sqrt{x} - \ln x.$$

a. La fonction est une différence de fonctions dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$, elle est donc dérivable et

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{\sqrt{x}-2}{2x}$ qui est du signe du numérateur puisque $x > 0$.

$f'(x) = 0 \iff \sqrt{x} = 2 \iff x = 4$;

$f'(x) < 0 \iff 0 < x < 4$; f est décroissante sur cet intervalle

$f'(x) > 0 \iff x > 4$; f est croissante sur cet intervalle.

Il en résulte que f a un minimum pour $x = 4$ et $f(4) = \sqrt{4} - \ln 4 2 - 2\ln 2 \approx 0,62$.

b. Le minimum de f étant supérieur à zéro, $f(x) > 0$ quel que soit $x \in]0\,;\,+\infty[$.

Donc $f(x) > 0 \iff \sqrt{x} - \ln x \iff \sqrt{x} > \ln x \iff \dfrac{\sqrt{x}}{x} > \dfrac{\ln x}{x} \iff \dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{\sqrt{x}}{x}$, car $x > 0$.

c. Comme $\dfrac{\sqrt{x}}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ et que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$, on obtient par application du théorème des « gendarmes » que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

$$f_n(x) = \dfrac{\ln x}{x^{\frac{1}{n}}}.$$

On a $n > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{n} > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{n} \geqslant 1 \iff$ d'où pour tout x supérieur à zéro, $\dfrac{1}{x^{\frac{1}{n}}} \leqslant \dfrac{1}{x} \iff \dfrac{\ln x}{x^{\frac{1}{n}}} \leqslant \dfrac{\ln x}{x}$.
D'après la question précédente et par application du théorème des « gendarmes », on obtient $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$.

EXERCICE 4 **7 points**

1. On sait que cette équation a pour solutions les fonctions : $x \longmapsto K\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$, $K \in \mathbb{R}$.

2.

$$2y' + y = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(x+1) \quad (\mathrm{E}')$$

a. $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(mx^2 + px\right)$: f est un produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$f'(x) = -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(mx^2 + px\right) + (2mx + p)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$.
f est solution de E$'$ si et seulement si $2f' + f = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(x+1) \iff$
$-\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(mx^2 + px\right) + 2(2mx+p)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} + \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(mx^2 + px\right) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(x+1) \iff$
$-mx^2 - px + 4mx + 2p + mx^2 + px = x + 1 \iff 4mx + 2p = x + 1 \iff$
$(4m-1)x + (2p-1) = 0$.
Cette fonction affine est nulle si et seulement si $4m - 1 = 0$ et $2p - 1 = 0$, soit si $m = \dfrac{1}{4}$ et $p = \dfrac{1}{2}$.

b. On a : g et f solutions de E$'$ si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2g' + g & = & \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(x+1) \\ 2f' + f & = & \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(x+1) \end{array}\right. \Rightarrow \text{(par différence)}$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2g' + g & = & \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(x+1) \\ 2(g' - f') + g - f & = & 0 \end{array}\right.$$

Donc g est solution de l'équation (E$'$) si et seulement si $g - f$ est solution de l'équation (E)

On a donc $g(x) - f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}{4}\left(x^2 + 2x\right)$ d'où $g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}{4}\left(x^2 + 2x + K'\right)$, $K' \in \mathbb{R}$.

3. h produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$h'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}{4}\left(-\dfrac{x^2}{2} - x + 2x + 2\right) = \dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}{4}\left(-\dfrac{x^2}{2} + x + 2\right)$ qui est du signe du trinôme $-\dfrac{x^2}{2} + x + 2$.
Pour ce trinôme $\Delta = 1 + 4 = 5$; il a donc deux racines $x_1 = 1 - \sqrt{5}$ et $x_2 = 1 + \sqrt{5}$.
Il est négatif (du signe de $-\frac{x}{2}$) sauf entre les racines.
$h'(x)$ est donc négative sauf sur l'intervalle $[1 - \sqrt{5}\ ;\ 1 + \sqrt{5}]$.
h est donc décroissante sauf sur $[1 - \sqrt{5}\ ;\ 1 + \sqrt{5}]$ où elle est croissante.

4. • On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^n}{\mathrm{e}^x} = 0$, quel que soit le naturel x ; donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}x^2 = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \times 2x = 0$.

Conclusion : $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0$.

• $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 + 2x = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$.

5. **a.** Étudions la fonction d définie par

$d(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} - \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(x^2 + 2x\right) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(1 - \frac{x^2}{4} - \frac{2x}{4}\right)$ qui est du signe du trinôme $-x^2 - 2x + 4$.

Pour ce trinôme $\Delta = 4 + 16 = 20 = \left(2\sqrt{5}\right)^2$. Il a donc pour racines $x_1 = -1 - \sqrt{5}$ et $x_2 = -1 + \sqrt{5}$. Il est négatif sauf entre les deux racines.

Donc la fonction d est négative sauf sur l'intervalle $[1 - \sqrt{5}\,;\, 1 + \sqrt{5}]$.

Conclusion : la courbe Γ est sous la courbe $\mathscr{C}$ sauf entre $-1 - \sqrt{5}$ et $-1 + \sqrt{5}$. Les deux courbes ayant deux points communs pour $x = -1 - \sqrt{5}$ et $x = -1 + \sqrt{5}$.

b.