Corrigé du baccalauréat S Antilles-Guyane septembre 2008

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

PARTIE A :

1.
- Initialisation : $u_0 = 1 + \dfrac{12}{5^0} = 1 + 12 = 13$: vrai ;
- Hérédité : supposons qu'il existe un naturel $p > 0$ tel que $u_p = 1 + \dfrac{12}{5^p}$; alors $u_{p+1} = \dfrac{1}{5}u_p + \dfrac{4}{5} = \dfrac{1}{5}\left(1 + \dfrac{12}{5^p}\right) + \dfrac{4}{5} = \dfrac{1}{5} + \dfrac{4}{5} + \dfrac{12}{5^{p+1}} = 1 + \dfrac{12}{5^{p+1}}$: l'hérédité est bien démontrée.

  On a donc pour tout entier naturel n, $u_n = 1 + \dfrac{12}{5^n}$.

  Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{12}{5^n} = 0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

2. **a.** On a $S_{n+1} - S_n = u_{n+1}$. Par une récurrence immédiatte, on a $u_n > 0$, ce qui entraîne que la suite (S_n) est croissante.

b. D'après la question **1.**, $S_n = 1 + \dfrac{12}{5^0} + \cdots + 1 + \dfrac{12}{5^n} = (n+1) \times 1 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{12}{5^k} = (n+1) + 12\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{5^k}$.

Le deuxième terme de la somme précédente est la somme des $(n+1)$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$, soit avec $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{5^k}$,

$\dfrac{1}{5}T_n = \dfrac{1}{5} + \cdots + \dfrac{1}{5^n} + \dfrac{1}{5^{n+1}}$ et par différence $\dfrac{4}{5}T_n = 1 - \dfrac{1}{5^{n+1}}$ et enfin $T_n = \dfrac{5}{4}\left(1 - \dfrac{1}{5^{n+1}}\right)$.

D'où $12\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{5^k} = 12 \times \dfrac{5}{4}\left(1 - \dfrac{1}{5^{n+1}}\right) = 15\left(1 - \dfrac{1}{5^{n+1}}\right) = 15 - \dfrac{3}{5^n}$

On a donc :

$$\boxed{S_n = (n+1) + 15 - \dfrac{3}{5^n} = n + 16 - \dfrac{3}{5^n}.}$$

c. La limite de la suite est celle de n, donc égale à $+\infty$.

PARTIE B :

Proposition 1 : Fausse : la suite (u_n) de l'exercice ci-dessus est convergente, alors que (S_n) diverge.

Proposition 2 : Fausse : la suite (u_n) de l'exercice ci-dessus est décroissante car la suite de terme général $\dfrac{1}{5^n}$ l'est et on a vu que la suite (S_n) est croissante.

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

PARTIE A :

On considère le système de congruences :

$$(S)\left\{\begin{array}{lcll} n & \equiv & 2 & \text{(modulo 3)} \\ n & \equiv & 1 & \text{(modulo 5)} \end{array}\right., \text{ où } n \text{ désigne un entier relatif.}$$

1. On a $11 = 3 \times 3 + 2$ et $1 = 5 \times 1$; 11 est donc solution de (S).

2. On a $\left\{\begin{array}{l c l l} n & \equiv & 2 & \text{(modulo 3)}\\ 11 & \equiv & 2 & \text{(modulo 3)}\end{array}\right.$ $\Rightarrow$ par différence $n - 11 \equiv 0$ modulo 3, qui signifie que $n - 11$ est un multiple de 3.

3. De même $\left\{\begin{array}{l c l l} n & \equiv & 1 & \text{(modulo 5)}\\ 11 & \equiv & 1 & \text{(modulo 5)}\end{array}\right.$ $\Rightarrow$ par différence $n - 11 \equiv 0$ modulo 5, qui signifie que $n - 11$ est un multiple de 5.

Comme 3 et 5 sont premiers entre eux, $n-11$ est multiple de $3 \times 5 = 15$. D'où $n-11 = 15k$, avec $k \in \mathbb{N}$ et enfin $n = 11 + 15k,\ k \in \mathbb{N}$.

PARTIE B :

1. - Application f : $\dfrac{1+\text{i}\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + \text{i}\sin\frac{\pi}{3} = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$.

On a donc $z' = z\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$: l'application f est donc une rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

- Application g : $z'' = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{5}}z$, donc g est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{5}$.

2. **a.** Comme $A_{n+1} = f(A_n)$, $\text{O}A_{n+1} = \text{O}A_n$ et $\left(\overrightarrow{\text{O}A_n}, \overrightarrow{\text{O}A_{n+1}}\right) = \dfrac{\pi}{3}$, le triangle $\text{O}A_nA_{n+1}$ est isocèle avec un angle au sommet de $\dfrac{\pi}{3}$, donc un triangle équilatéral.

b. Les points $A_0,\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4$ et A_5 sont équidistants de O, donc sur un cercle de centre O.

Les triangles $\text{O}A_nA_{n+1}$ sont équilatéraux, donc $A_0A_1A_2A_3A_4A_5$ est un hexagone régulier de centre O.

3. **a.** De la même façon les points B_n sont sur le cercle de centre O et rayon $\text{O}B_0 = \left|4\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{5}}\right| = 4$.

b. D'après la relation de Chasles : $\left(\overrightarrow{\text{O}B_n}, \overrightarrow{\text{O}B_{n+2}}\right) = \left(\overrightarrow{\text{O}B_n}, \overrightarrow{\text{O}B_{n+1}}\right) + \left(\overrightarrow{\text{O}B_{n+1}}, \overrightarrow{\text{O}B_{n+2}}\right) = \dfrac{\pi}{5} + \dfrac{\pi}{5} = \dfrac{2\pi}{5}. \quad (2\pi)$

c. Les points B_n sont sur le cercle de centre O et de rayon 4 et les triangles $\text{O}B_nB_{n+2}$ sont isocèles d'angle au sommet $\dfrac{2\pi}{5}$.

Le polygone $B_0B_2B_4B_6B_8$ est donc un pentagone régulier de centre O.

4. **a.** Puisque $a_{n+1} = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}a_n$, (a_n) est une suite géométrique de raison $\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$. On a donc $a_n = \left(\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}\right)^n a_0 = \left(\text{e}^{n\text{i}\frac{\pi}{3}}\right) \times 2\text{e}^{-2\text{i}\frac{\pi}{3}} = 2\left(\text{e}^{\text{i}\frac{(n-2)\pi}{3}}\right)$.

De même, comme $b_{n+1} = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{5}}b_n$, (b_n) est une suite géométrique de raison $\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{5}}$. On a donc $b_n = \left(\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{5}}\right)^n b_0 = \left(\text{e}^{n\text{i}\frac{\pi}{5}}\right) \times 4\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{5}} = 4\left(\text{e}^{\text{i}\frac{(n-1)\pi}{5}}\right)$.

b. Les points sont les deux sur l'axe des réels si leurs arguments sont égaux à 0 à π près, c'est-à-dire si

$$\left\{\begin{array}{l c l l} \dfrac{(n-2)\pi}{3} & \equiv & 0 & [\pi]\\ \dfrac{(n-1)\pi}{5} & \equiv & 0 & [\pi]\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l l} n-2 & \equiv & 0 & [3]\\ n-1 & \equiv & 0 & [5]\end{array}\right.$$

Les points A_n et B_n sont simultanément sur l'axe des réels si n est solution du système (S) ci-dessus, donc si n est de la forme $11 + 15k$ avec $k \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 3 **7 points**

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + 2 - \frac{4\text{e}^x}{\text{e}^x + 3}.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

1. **a.** Comme $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+3} = 0$. La limite de $f(x)$ est celle de $x+2$ soit $-\infty$.

b. $f(x)-(x+2) = -\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+3}$ et on a vu que la limite de ce quotient est égale à 0 au voisinage de $-\infty$. Ceci montre que la droite $\mathscr{D}_1$ d'équation $y = x+2$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $-\infty$.

c. Comme 4, e^x, e^x+3 sont des nombres supérieurs à zéro, $-\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+3} < 0$.

Ceci montre que la droite $\mathscr{D}_1$ est sous la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $-\infty$.

2. **a.** f est une somme de quotients de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, le dénominateur ne s'annulant pas : elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = 1+\frac{-4\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x+3)+4\mathrm{e}^x\times\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+3)^2} = 1-\frac{12\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+3)^2} = \frac{(\mathrm{e}^x+3)^2-12\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+3)^2} =$$

$$\frac{\mathrm{e}^{2x}+9+6\mathrm{e}^x-12\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+3)^2} = \frac{\mathrm{e}^{2x}+9-6\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+3)^2} = \frac{(\mathrm{e}^x-3)^2}{(\mathrm{e}^x+3)^2}$$

D'où finalement $f'(x) = \left(\dfrac{\mathrm{e}^x-3}{\mathrm{e}^x+3}\right)^2$, quel que soit $x \in \mathbb{R}$.

b. On a manifestement $f'(x) \geqslant 0$.

La fonction f est donc croissante sur $\mathbb{R}$.

On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -\frac{4\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+3} = -4$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		$\ln 3$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$		$\nearrow$		$+\infty$

3. **a.** $f'(x) = 0 \iff \mathrm{e}^x = 3 \iff x = \ln 3$.

$\mathscr{C}$ a donc une tangente horizontale au point d'abscisse $x = \ln 3$.

On a $f(\ln 3) = \ln 3+2-\dfrac{4\times 3}{3+3} = \ln 3$.

L'équation de $\mathscr{D}_2$ est $y = \ln 3-2$.

b. - Si $x < \ln 3$, alors par croissance de f, $f(x) < f(\ln 3)$. La courbe $\mathscr{C}$ est sous la droite $\mathscr{D}_2$.

- Si $x > \ln 3$, alors par croissance de la fonction f $f(x) > f(\ln 3)$. La courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de la droite $\mathscr{D}_2$.

- Si $x = \ln 3$, alors $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}_2$ sont tangentes.

4. **a.** $M(x\,;\,y) \in \mathscr{D}_3 \iff \dfrac{Y-f(0)}{X-0} = f'(0)$ (si $X \neq 0 \iff Y = f(0)+f'(0)X$.

$f(0) = 2-\dfrac{4}{4} = 1$;

$f'(0) = \left(\dfrac{-2}{4}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$.

$M(x\,;\,y) \in \mathscr{D}_3 \iff y = \dfrac{1}{4}x+1$

b. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - \left(\dfrac{1}{4}x + 1\right)$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = f'(x) - \dfrac{1}{4}$;

g' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'"(x) = f''(x) = \dfrac{12\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x - 3)}{(\mathrm{e}^x + 3)^3}$; ce quotient est du signe de $\mathrm{e}^x - 3$; le signe de g'' dépend donc de la position de x par rapport à $\ln 3$:

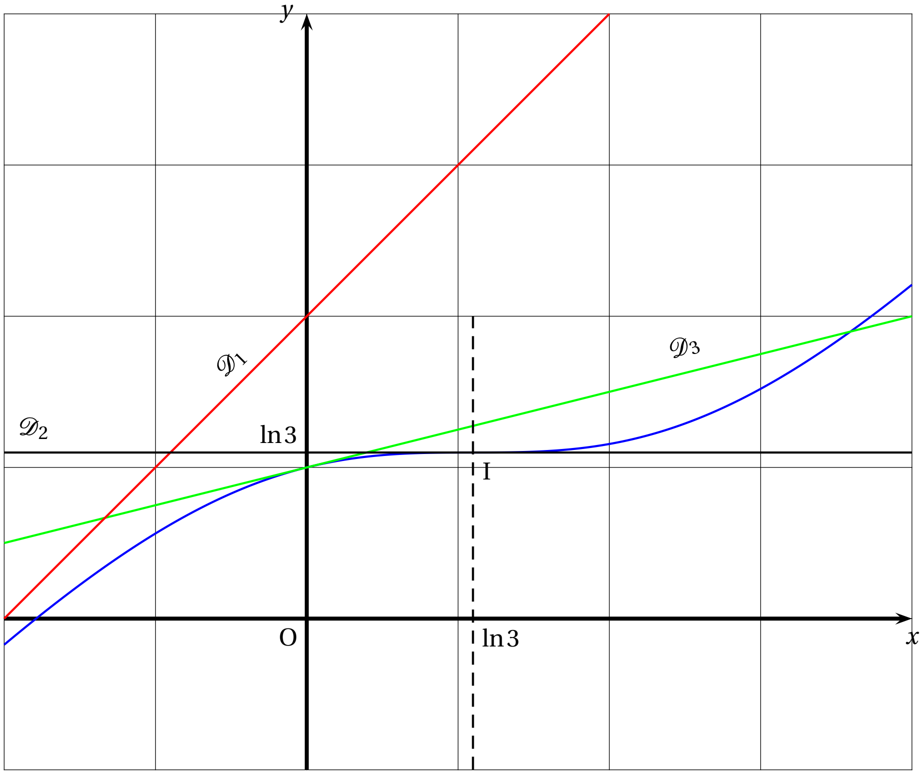
- si $x < \ln 3$, $g''(x) < 0$, ce qui signifie que g' est décroissante ;
- si $x > \ln 3$, $g''(x) > 0$, ce qui signifie que g' est croissante.
- g' admet donc un minimum en $\ln 3$ qui vaut $g'(\ln 3) = f'(\ln 3) - \dfrac{1}{4} = 0 - \dfrac{1}{4} = -\dfrac{1}{4}$.

On remarque que $g'(0) = f'(0) - \dfrac{1}{4} = \left(\dfrac{-2}{4}\right)^2 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4} = 0$.

On en déduit que sur $]-\infty\,;\,0[$, $g'(x) > 0$, donc g est croissante, puis que sur $]0\,;\,\ln 3[$, $g'(x) < 0$, donc g est décroissante.

g a donc un maximum en $x = 0$ qui vaut $g(0) = f(0) - 1 = 2 - \dfrac{4}{4} - 1 = 0$.

Conclusion : sur l'intervalle $]-\infty\,;\,\ln 3[$, la fonction g est négative soit $f(x) - \left(\dfrac{1}{4}x + 1\right) < 0 \iff f(x) < \left(\dfrac{1}{4}x + 1\right)$, ce qui signifie que $\mathscr{C}$ est au dessous de $\mathscr{D}_3$ sur $]-\infty\,;\,\ln 3[$.



6. **a.** Posons $u(x) = \mathrm{e}^x + 3$; u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = \mathrm{e}^x$.

On a donc $g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 3} = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

On sait qu'une primitive de cette fonction est $\ln|u(x)| = \ln u(x)$ car $u(x) \geqslant 3 > 0) = \ln(\mathrm{e}^x + 3)$.

Une primitive G de g sur $\mathbb{R}$ est donc $G(x) = \ln(\mathrm{e}^x + 3)$.

b. On a vu que quel que soit x, $\mathscr{C}$ est en dessous de $\mathscr{D}_1$, donc l'aire cherchée est :

$\mathscr{A}(\lambda) = \displaystyle\int_\lambda^0 [(x+2) - f(x)]\,\mathrm{d}x = \int_\lambda^0 4\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 3}$ (d'après la question **1. b.**)

Donc $\mathscr{A}(\lambda) = G(0) - G(\lambda) = 4\ln\left(\mathrm{e}^0+3\right) - 4\left[\ln\left(\mathrm{e}^\lambda+3\right)\right] = 4\ln 4 - 4\left[\ln\left(\mathrm{e}^\lambda+3\right)\right]$.

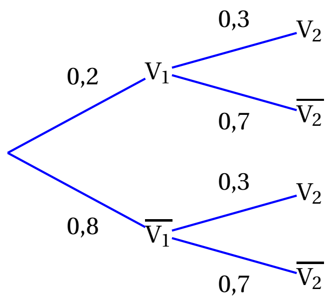
c. On a $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} \mathrm{e}^\lambda = 0$, donc $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} 4\ln\left(\mathrm{e}^\lambda+3\right) = 4\ln 3$.

Puis $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} \mathscr{A}(\lambda) = 4\ln 4 - 4\ln 3 = \ln 4^4 - \ln 3^4 = \ln\left(\dfrac{4}{3}\right)^4 = \ln\dfrac{256}{81} \approx 1,15$ u. a.

EXERCICE 4 — 4 points

Commun à tous les candidats

1.



On a de suite $p(\mathrm{V}_1 = \dfrac{2}{10} = 0,2,\ p\left(\overline{\mathrm{V}_1}\right) = \dfrac{8}{10} = 0,8$.

$p(\mathrm{V}_2 = \dfrac{3}{10} = 0,3,\ p\left(\overline{\mathrm{V}_2}\right) = \dfrac{7}{10} = 0,7$.

En suivant la première branche, on obtient $p\left(\mathrm{V}_1 \cap \mathrm{V}_2\right) = 0,2\times 0,3 = 0,06$.

2. On gagne un ours en peluche si on tire une seule bille verte ; donc avec une probabilité de

$p\left(\mathrm{V}_1 \cap \overline{\mathrm{V}_2}\right) + p\left(\overline{\mathrm{V}_1} \cap \mathrm{V}_2\right) = 0,2\times 0,7 + 0,8\times 0,3 = 0,14 + 0,24 = 0,38$.

3. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de gagnants.

On a une épreuve de Bernoulli puisque les parties sont indépendantes avec $n = 20$ et $p = 0,06$.

La probabilité que 2 parmi les 20 gagnent un lecteur MP3 est :

$$p(X=2) = \binom{20}{2} \times 0,06^2 \times (1-0,06)^{20-2} \approx 0,2246 \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}$$

4. Calculons la probabilité qu'aucune de ces n ne gagnent un lecteur MP3 ; elle est égale à $\binom{n}{0} \times 0,06^0 \times 0,94^n = 0,94^n$.

La probabilité qu'au moins une personne gagne est donc égale à : $p_n = 1 - 0,94^n$.

Or $p_n \geqslant 0,99 \iff 1 - 0,94^n \geqslant 0,99 \iff 0,01 \geqslant 0,94^n$ soit par croissance de la fonction logarithme népérien $\ln 0,01 \geqslant \ln\left(0,94^n\right) \iff \ln\left(\dfrac{1}{100}\right) \geqslant n\ln 0,94 \iff -\ln 100 \geqslant n\ln(0,94) \iff n \geqslant \dfrac{-\ln 100}{\ln 0,94}$ car $\ln 0,94 < 0$.

La calculatrice donne $n \geqslant 74,5$.

Il faut au moins 75 joueurs pour qu'il y ait au moins un gagnant du lecteur MP3 avec une probabilité de 99 %.