

## ~ Corrigé du baccalauréat S Asie 21 juin 2010 ~

### EXERCICE 1

**4 points**

**Commun à tous les candidats**

1. Question 1 : Le triangle GBI est :

Réponse **a** : isocèle.      Réponse **b** : équilatéral.      Réponse **c** : rectangle.

On a  $GB^2 = 1 + 2 = 3 \Rightarrow GB = \sqrt{3}$ ; de même  $BI = \sqrt{3}$  et  $GI = 2$ . Le triangle GBI est isocèle.

2. Question 2 : Le barycentre du système de points pondérés  $\{(O, 2), (A, -1), (C, 1)\}$  est :

Réponse **a** : le point K.      Réponse **b** : le point I.      Réponse **c** : le point J.

Par définition le barycentre G vérifie :  $2\vec{GO} - \vec{GA} + \vec{GC} = \vec{0} \iff 2\vec{OG} = \vec{AC} \iff$

$$\vec{OG} = \frac{1}{2}\vec{AC} = \vec{OJ} \Rightarrow G = J.$$

3. Question 3 : Le produit scalaire  $\vec{AH} \cdot \vec{FC}$  est égal à :

Réponse **a** : 1.      Réponse **b** : -1.      Réponse **c** : 2.

Avec  $\vec{AH}(-1; 1; 1)$  et  $\vec{FC}(0; 0; -1)$ ,  $\vec{AH} \cdot \vec{FC} = -1$ .

4. Question 4 : Les points B, C, I, H :

Réponse **a** : sont non coplanaires.      Réponse **b** : forment un rectangle.      Réponse **c** : forment un carré.

On a  $BC = HI = 1$  et  $CI = BH = \sqrt{2}$ . Ces points sont coplanaires (ils appartiennent au plan d'équation  $x+z=1$ ), donc BCIH est un parallélogramme. Or  $\vec{BC} \cdot \vec{CI} = 0+0+0=0$ . Le parallélogramme a un angle droit : c'est un rectangle.

5. Question 5 : Une représentation paramétrique de paramètre  $t$  de la droite (KE) est :

$$\text{On a } \vec{KE}(1; -1; 1). M(x; y; z) \in (KE) \iff \vec{KM} = u\vec{KE}, u \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x-0 = u \\ y-2 = -u \\ z-0 = u \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = u \\ y = 2-u \\ z = u \end{cases}$$

En posant  $t = 1 - u \iff u = 1 - t$ , on obtient

$$M(x; y; z) \in (KE) \iff \begin{cases} x = 1-t \\ y = 1+t \\ z = 1-t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

6. Question 6 : Une équation cartésienne du plan (GBK) est :

Réponse **a** :  $2x+2y-z-2=0$ . Réponse **b** :  $x+y-3=0$ . Réponse **c** :  $x+y+2z=2$ .

Les coordonnées de G, B et K ne vérifient que l'équation  $x+y+2z=2$ .

7. Question 7 : La distance du point C au plan (ADH) est :

Réponse **a** :  $\sqrt{2}$ .      Réponse **b** : 2.      Réponse **c** :  $\frac{1}{2}$ .

Une équation du plan (ADH) est  $x+y-1=0$ . Donc  $d(C, ADH) = \frac{|1+2-1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} =$

$\sqrt{2}$ .

8. Question 8 : Le volume du tétraèdre HJKB est égal à :

Réponse a :  $\frac{1}{2}$ .                      Réponse b :  $\frac{1}{6}$ .                      Réponse c :  $\frac{1}{3}$ .

On prend comme base BJK dont l'aire est  $\frac{1}{2}$ , comme hauteur  $HJ = 1$ , d'où un volume égal à  $V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{6}$ .

## EXERCICE 2

5 points

Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

### PARTIE A Étude de la configuration

1. Construction de la figure.

a. Cf. figure.

b. On a  $|b|^2 = 2^2 + (-2\sqrt{3})^2 = 4 + 12 = 16 = 4^2$ .

Donc  $|b| = 4$ .

De même  $|c|^2 = 3^2 + (3\sqrt{3})^2 = 9 + 27 = 36 = 6^2$ .

Donc  $|c| = 6$ .

c. Voir les droites en tiretés.

2.  $BC^2 = 1^2 + 75 = 76$ ;

$BP^2 = 64 + 12 = 76$ ;

$PC^2 = 49 + 27 = 76$ ;

Donc  $BC^2 = BP^2 = PC^2 = 76 \Rightarrow BC = BP = PC \Rightarrow BCP$  est équilatéral.

• Autre méthode : On calcule

$$\frac{b-p}{c-p} = \frac{-8-2i\sqrt{3}}{-7+3i\sqrt{3}} = \frac{(-8-2i\sqrt{3})(-7+3i\sqrt{3})}{(-7+3i\sqrt{3})(-7-3i\sqrt{3})} = \frac{56-18+24i\sqrt{3}+14i\sqrt{3}}{49+27} = \frac{38+38i\sqrt{3}}{76} =$$

$$\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

On a donc d'une part :

$$\left| \frac{b-p}{c-p} \right| = \left| e^{i\frac{\pi}{3}} \right| = 1, \text{ ce qui signifie } \frac{PC}{BP} = 1, \text{ donc } PC = BP : \text{ le triangle } BPC \text{ est isocèle en } P,$$

d'autre part :

$$\arg\left(\frac{b-p}{c-p}\right) = \arg\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

Conclusion BPC est isocèle en P et l'angle en P a pour mesure  $\frac{\pi}{3}$  ; les deux autres angles ont donc eux aussi pour mesure  $\frac{\pi}{3}$  et le triangle BPC est équilatéral.

3. a. On a par définition de la rotation  $q$  étant l'affixe de Q :

$$q-a = e^{i\frac{\pi}{3}}(c-a) \iff q = a + e^{i\frac{\pi}{3}}(c-a) = -2 + (5+3i\sqrt{3})\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2 + \frac{5}{2} -$$

$$\frac{9}{2} + \frac{5i\sqrt{3}}{2} + \frac{3i\sqrt{3}}{2} = -4 + 4i\sqrt{3}.$$

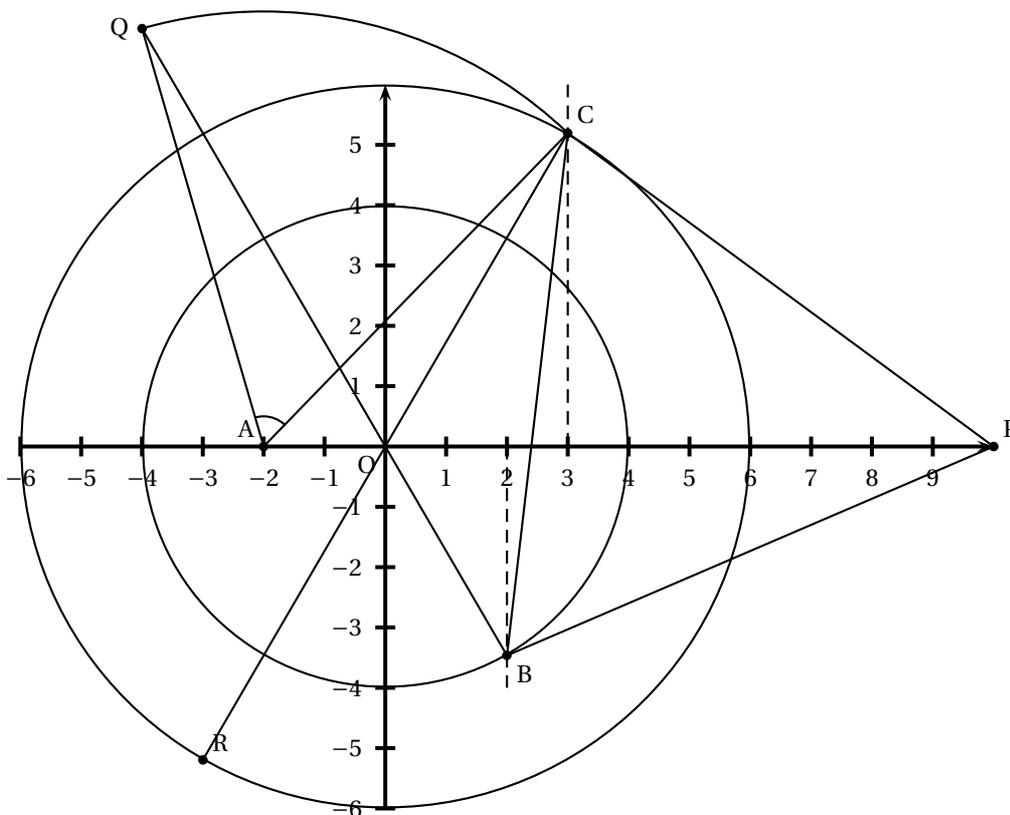
b. On a  $q = -4 + 4i\sqrt{3} = -2(2 - 2i\sqrt{3}) = -2b$ .

On a donc  $\overrightarrow{OQ} = -2\overrightarrow{OB}$  ce qui signifie que les vecteurs sont colinéaires ou encore les points O, Q et B sont alignés.

4. a. Par définition O, C et R sont alignés ; on vient de démontrer que O, Q et B sont alignés et A, O et P sont sur l'axe des réels.

Conclusion : (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes en O.

b.



**PARTIE B**

1.  $f(O) = OA + OB + OC = |a| + |b| + |c| = 2 + 4 + 6 = 12$ .
2. Par définition de la rotation de centre A et d'angle  $\frac{\pi}{3}$ , un point M, son image N et le centre A sont les sommets d'un triangle équilatéral. Donc  $MA = MN$ .  
D'autre part M et C ayant pour images respectives par l'isométrie  $r_A$  les points N et Q, on a  $MC = NQ$ .
3.  $f(M) = MA + MB + MC = MN + MB + MC$  d'après la question précédente,  
 $f(M) \geq BN + MC$ , d'après l'inégalité triangulaire dans BMN,  
 $f(M) \geq BN + NQ$  d'après la question précédente,  
 $f(M) \geq BQ$  d'après l'inégalité triangulaire dans BNQ.  
Or B, O et Q étant alignés :  $BQ = BO + OQ = 4 + 8 = 12$  et finalement

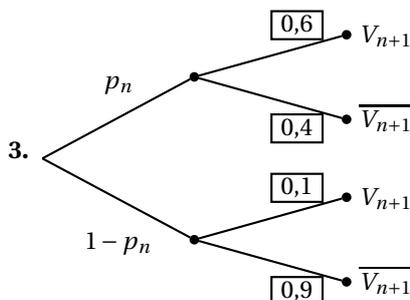
$$f(M) \geq 12.$$

Conclusion : d'après la question précédente on voit donc que le point qui minimise la somme des distances d'un point du plan aux trois sommets du triangle ABC, est le point O, cette somme des distances étant égale à 12.

**EXERCICE 3**  
**Commun à tous les candidats**

**4 points**

1. a. A : D'après l'énoncé  $p(V_2) = 0,6$  et  $p_{V_2}(V_3) = 0,6$ , donc  $p(V_2 \cap V_3) = p(V_2) \times p_{V_2}(V_3) = 0,6 \times 0,6 = 0,36$ .  
 b. B : On a  $p(V_2) = 0,6 \Rightarrow p(\overline{V_2}) = 1 - 0,6 = 0,4$  et d'après l'énoncé  $p_{\overline{V_2}}(V_3) = 0,9$ .  
 Donc  $p(\overline{V_2} \cap V_3) = p(\overline{V_2}) \times p_{\overline{V_2}}(V_3) = 0,4 \times 0,9 = 0,36$ .
2. On a  $p_3 = p(V_3) = p(V_3 \cap V_2) + p(V_3 \cap \overline{V_2})$ .  
 Or  $p(V_3 \cap \overline{V_2}) = p(\overline{V_2}) \times p_{\overline{V_2}}(V_3) = 0,4 \times (1 - 0,9) = 0,4 \times 0,1 = 0,04$ .  
 Conclusion :  $p_3 = 0,36 + 0,04 = 0,4$ .



4. On a (ce que l'on peut voir sur l'arbre) :  

$$p_{n+1} = p(V_{n+1}) = p(V_{n+1} \cap V_n) + p(V_{n+1} \cap \overline{V_n}) = p_n \times 0,6 + (1 - p_n) \times 0,1 = 0,6p_n - 0,1p_n + 0,1 = 0,5p_n + 0,1$$
5. a. Pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $u_{n+1} = p_{n+1} - 0,2 = 0,5p_n + 0,1 - 0,2 = 0,5p_n - 0,1 = 0,5(p_n - 0,1) = 0,5u_n$ .  
 Cette égalité montre que la suite  $u$  est une suite géométrique de raison  $0,5$ ; son premier terme est  $u_1 = p_1 - 0,2 = 1 - 0,2 = 0,8$ .  
 b. On sait que pour tout entier naturel  $n$  non nul  $u_n = u_1 \times r^{n-1} = 0,8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{0,8}{2^{n-1}}$ .  
 De la définition de  $u_n$  il résulte que  $p_n = 0,2 + \frac{0,8}{2^{n-1}}$ .  
 c. On sait que  $0 < \frac{1}{2} < 1$  entraîne que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{0,8}{2^{n-1}} = 0$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 0,2$ .

**EXERCICE 4**

**4 points**

**Commun à tous les candidats**

**PARTIE A**

**1. Étude des limites**

- a. •  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$ ;  
 •  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ ,  
 donc par produit de limites  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ .
- b. Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$ .  
 Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ , donc par produit de limites  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .
- c. La première limite montre que l'axe des ordonnées est asymptote à  $\mathcal{C}$  au voisinage de zéro.  
 La seconde montre que l'axe des abscisses est asymptote à  $\mathcal{C}$  au voisinage de plus l'infini.

2. Étude des variations de la fonction  $f$ 

- a.  $f(x)$  étant considéré comme un produit de fonctions dérivables sur  $]0; +\infty[$ , on a :

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x^2}\right)' e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2} \left(e^{\frac{1}{x}}\right)' = -\frac{2x}{x^4} e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2} \left(-\frac{1}{x^2}\right) e^{\frac{1}{x}} = -e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{2x}{x^4} + \frac{1}{x^4}\right) = -\frac{1}{x^4} e^{\frac{1}{x}} (2x+1).$$

- b. On a  $x > 0 \Rightarrow 2x > 0 \Rightarrow 2x + 1 > 1 > 0$ ; d'autre part quel que soit  $u \in \mathbb{R}$ ,  $e^u > 0$ .

Enfin  $x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x^4} > 0$ , donc finalement pour tout réel supérieur à zéro,

$$f'(x) < 0.$$

Il en résulte que la fonction  $f$  est décroissante sur  $]0; +\infty[$  de plus l'infini à zéro d'après la première question.

- c. D'après le résultat précédent (décroissance de  $f$  de plus l'infini à zéro sur  $]0; +\infty[$ ), la fonction  $f$  continue car dérivable sur cet intervalle il existe un unique réel  $\alpha$  tel que  $f(\alpha) = 0$ .

La calculatrice donne :

$$f(1,1) \approx 2,05 \text{ et } f(1,2) \approx 1,60 \text{ donc } 1,1 < \alpha < 1,2;$$

$$f(1,10) \approx 2,05 \text{ et } f(1,11) \approx 1,99 \text{ donc } 1,10 < \alpha < 1,11.$$

La valeur approchée au centième de  $\alpha$  est donc 1,11.

## 3. Voir plus bas

## PARTIE B Étude d'une suite d'intégrales

1.  $I_2 = \int_1^2 \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx.$

On pose  $u(x) = \frac{1}{x}$  qui est dérivable sur  $]0; +\infty[$  donc  $u'(x) = -\frac{1}{x^2}$ .

La fonction à intégrer est donc de la forme  $-u'(x)e^{u(x)}$  qui est la dérivée de  $-e^{u(x)}$ .

On a donc  $I_2 = \left[-e^{\frac{1}{x}}\right]_1^2 = e - e^{\frac{1}{2}} = e - \text{sqrte}.$

## 2. Une relation de récurrence

a.  $I_n = \int_1^2 \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} dx.$

On pose  $u'(x) = \frac{1}{x^n}$  et  $v(x) = e^{\frac{1}{x}}$ ; d'où

$$u(x) = -\frac{1}{n-1} \frac{1}{x^{n-1}} \text{ et } v'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}.$$

Toutes les fonctions sont dérivables, donc continues sur  $]0; +\infty[$  : on peut donc intégrer par parties :

$$I_n = \left[-\frac{1}{n-1} \frac{1}{x^{n-1}} e^{\frac{1}{x}}\right]_1^2 - \frac{1}{n-1} \int_1^2 \frac{1}{x^{n-1}} \times \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx = \frac{1}{n-1} \left(e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}}\right) - \frac{1}{n-1} \int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}} e^{\frac{1}{x}} dx = \frac{1}{n-1} \left(e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}}\right) - \frac{1}{n-1} I_{n+1}.$$

Puis  $(n-1)I_n = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} - I_{n+1} \Leftrightarrow I_{n+1} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (1-n)I_n.$

- b. La relation de récurrence précédente permet de calculer :

$$I_3 = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{2-1}} + (1-2)I_2 = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{2-1}} - (e + \sqrt{e}) = -\frac{\sqrt{e}}{2}.$$

3. a. Soit  $x$  tel que :

$0 < 1 \leq x \leq 2$ , donc en passant aux inverses :  $0 < \frac{1}{2} \leq \frac{1}{x} \leq 1$ , puis par croissance de la fonction exponentielle :

$< e^{\frac{1}{2}} \leq e^{\frac{1}{x}} \leq e^x$ , d'où en particulier

$$0 < e^{\frac{1}{x}} \leq e.$$

Comme  $x^n > 0$  pour tout naturel et tout réel  $x$  entre 1 et 2, il résulte que :

$$0 < \frac{1}{x^n} < e^{\frac{1}{x}} \frac{1}{x^n} \leq e \frac{1}{x^n}, \text{ ou encore}$$

$$0 \leq \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} \leq \frac{e}{x^n}.$$

b. On en déduit l'encadrement de l'intégrale  $I_n$  :

$$\int_1^2 0 \, dx < \int_1^2 \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} \, dx \leq \frac{e}{x^n} \, dx,$$

$$\text{soit } 0 < I_n \leq e \left[ -\frac{1}{n-1} \frac{1}{x^{n-1}} \right]_1^2$$

$$\text{soit finalement } 0 < I_n \leq \frac{e}{n-1} \left( 1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right).$$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n-1} = 0$ , on obtient par produit de limites :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e}{n-1} \left( 1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right) = 0.$$

D'après le théorème des « gendarmes » on a donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

