Corrigé du baccalauréat S Métropole La Réunion 16 septembre 2010

EXERCICE 1 **6 points**
Commun à tous les candidats

Partie 1 : Étude de la fonction f

1. Comme x est supérieur à zéro, le signe de $f(x)$ est celui de $1 - \ln x$.
   Or $1 - \ln x > 0 \iff 1 > \ln x \iff \ln \text{e} > \ln x \iff \text{e} > x$ par croissance de la fonction ln.
   On a donc :
   $f(x) > 0 \iff 0 < x < \text{e}$;
   $f(x) = 0 \iff x = \text{e}$;
   $f(x) < 0 \iff x > \text{e}$.
2. • Au voisinage de zéro : $f(x) = x - x\ln x$.
   On sait que $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\ln x = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.
   • Au voisinage de plus l'infini :
   On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0} 1 - \ln x = -\infty$. Par produit des limires on obtient : $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$.
   Remarque : la lecture de l'annexe correspond bien à ces résultats.
3. f produit de fonctions dérivables sur $]0\ ;\ +\infty[$ est dérivable sur cet intervalle et :
   $f'(x) = 1 - \ln x + x \times \left(-\dfrac{1}{x}\right) = 1 - \ln x - 1 = -\ln x$.
   Or $-\ln x > 0 \iff \ln x < 0 \iff \ln x < \ln 1 \iff x < 1$ par croissance de la fonction ln.
   De même $-\ln x > 0 \iff x > 1$.
   Conclusion : la fonction est croissante sur $]0\ ;\ 1]$ et décroissante sur $[1\ ;\ +\infty[$.

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0				
$f(x)$	|| 0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

4. **a.** On a $M(x\ ;\ y) \in (T_a) \iff y - f(a) = f'(a)(x-a) \iff y - a + a\ln a = -\ln a(x-a) \iff$
   $y = -x\ln a + a$.
   Le point d'intersection de la droite (T_a) et de l'axe des ordonnées a une abscisse nulle, d'où $y = a$, ordonnée du point A$'$.
   Conclusion : $\text{A}'(0\ ;\ a)$.
   b. Il suffit de tracer le quart de cercle centré en O de rayon a qui coupe l'axe des ordonnées au point $\text{A}'(0\ ;\ a)$
   Du point $(a\ ;\ 0)$ donné sur la figure on trace la verticale qui coupe $\mathscr{C}$ au point $\text{A}(a\ ;\ f(a))$.
   La tangente est la droite (AA'). Voir à la fin la figure.

Partie II : Un calcul d'aire

1. • On a vu à la question 1. que sur $]0~;~\text{e}]$ la fonction f est positive. La mesure de la surface limitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = \text{e}$ est donc égale à l'intégrale $\mathcal{A}(a) = \displaystyle\int_a^{\text{e}} f(x)\,\text{d}x$.

• On a vu que sur $[\text{e}~;~+\infty[$, $f(x) < 0$. Dans ce cas la surface limitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = \text{e}$ est donc égale à $-\displaystyle\int_{\text{e}}^{a} f(x)\,\text{d}x = \displaystyle\int_a^{\text{e}} f(x)\,\text{d}x = \mathcal{A}(a)$ en permutant les bornes d'intégration.

2. On a donc $\mathcal{A}(a) = \displaystyle\int_a^{\text{e}} x(1-\ln x)\,\text{d}x$.

Posons $\left\{\begin{array}{lcl} u'(x) & = & x \\ v(x) & = & 1-\ln x \end{array}\right.$ d'où $\left\{\begin{array}{lcl} u(x) & = & \dfrac{x^2}{2} \\ v'(x) & = & -\dfrac{1}{x} \end{array}\right.$.

Toutes ces fonctions étant continues et dérivables sur $]0~;~+\infty[$, on peut donc intégrer par parties :

$\mathcal{A}(a) = \left[\dfrac{x^2}{2}(1-\ln x)\right]_a^{\text{e}} + \displaystyle\int_a^{\text{e}} \dfrac{1}{x}\times\dfrac{x^2}{2}\,\text{d}x = \left[\dfrac{x^2}{2}(1-\ln x)\right]_a^{\text{e}} + \displaystyle\int_a^{\text{e}} \dfrac{x}{2}\,\text{d}x =$

$\left[\dfrac{x^2}{2}(1-\ln x) + \dfrac{x^2}{4}\right]_a^{\text{e}} = \left[\dfrac{x^2}{2}\left(\frac{3}{2}-\ln x\right) + \dfrac{x^2}{4}\right]_a^{\text{e}} =$

$\dfrac{\text{e}^2}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right) - \dfrac{a^2}{2}\left(\dfrac{3}{2}-\ln a\right) = \dfrac{\text{e}^2}{4} - \dfrac{a^2}{2}\left(\dfrac{3}{2}-\ln a\right)$.

EXERCICE 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. **a.** En partant du point $((u_0 = 5~;~0)$ et en allant alternativement verticalement vers la courbe $\mathcal{C}$ et horizontalement vers la droite Δ, on obtient les points de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisses, u_1, u_2, u_3 etc. Voir la figure

b. Sur la vue des premiers termes il semble que la suite soit décroissante vers l'abscisse du point commun à $\mathcal{C}$ et à Δ soit vers 1.

2. **a.** • Initialisation : on a $u_0 - 1 = 5 - 1 = 4 > 0$: vrai.

• Hérédité : supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n - 1 > 0$.

Or $u_{n+1} = \dfrac{4u_n-1}{u_n+2}$ donc $u_{n+1} - 1 = \dfrac{4u_n-1}{u_n+2} - 1 = \dfrac{4u_n-1-u_n-2}{u_n+2} = \dfrac{3u_n-3}{u_n+2} = \dfrac{3(u_n-1)}{u_n+2}$.

On sait que $u_n - 1 > 0$, donc $u_n > 1$ et $u_n + 2 > 3 > 0$.

Tous les termes de $u_{n+1} - 1$ sont supérieurs à zéro, donc finalement $u_{n+1} - 1 > 0$.

On a donc démontré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - 1 > 0$.

b. • Décroissance de la suite : soit $u_{n+1} - u_n = \dfrac{4u_n-1}{u_n+2} - u_n = \dfrac{4u_n-1-u_n^2-2u_n}{u_n+2} = \dfrac{-u_n^2+2u_n-1}{u_n+2} = -\dfrac{u_n^2-2u_n+1}{u_n+2} = -\dfrac{(u_n-1)^2}{u_n+2}$. Les deux termes du quotients sont positifs, donc finalement $u_{n+1} - u_n < 0$ ce qui démontre que la suite (u_n) est décroissante.

Or $u_n - 1 > 0 \iff u_n > 1$ La suite étant minorée par 1 et décroissante converge vers une limite $\ell \geqslant 1$ et par continuité de la fonction f, on a $\ell = \dfrac{4\ell-1}{\ell+2}$ équation dont la seule solution est $\ell = 1$.

La suite (u_n) converge vers 1.

3. **a.** On a $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}-1} - \dfrac{1}{u_n-1}$.

Or on a vu ci-dessus (démonstration par récurrence) que $u_{n+1} - 1 = \dfrac{3(u_n-1)}{u_n+2}$, donc

$v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n+2}{3(u_n-1)} - \dfrac{1}{u_n-1} = \dfrac{u_n+2-3}{3(u_n-1)} = \dfrac{u_n-1}{3(u_n-1)} = \dfrac{1}{3}$, car on a vu que $u_n - 1 > 0$.

Ceci montre que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{3}$, de premier terme $v_0 = \dfrac{1}{u_0 - 1} = \dfrac{1}{5-1} = \dfrac{1}{4}$.

b. On sait que $v_n = v_0 + n \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{3} \times n = \dfrac{1}{4} + \dfrac{n}{3} = \dfrac{3+4n}{12}$.

Or $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1} \iff u_n - 1 = \dfrac{1}{v_n} \iff u_n = \dfrac{1}{v_n} + 1 = \dfrac{12}{3+4n} + 1 = \dfrac{12+3+4n}{3+4n} = \dfrac{15+4n}{3+4n}$, quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

On retrouve ici que les termes de (u_n) sont des rationnels et comme le suggérait les constructions du 1. a. que $u_1 = \dfrac{19}{7}$, $u_2 = \dfrac{23}{11} = 2$, $u_3 = \dfrac{9}{5} = 1,8$.

c. Pour $n > 0$ on peut écrire $u_n = \dfrac{4 + \frac{15}{n}}{4 + \frac{3}{n}}$.

On voit facilement que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. **a.** $C(1\,;3\,;2) \in (\mathscr{P}) \iff 3 \times 1 + 3 - 2 - 1 = 0 \iff 3 = 0$, faux. Le point C n'appartient pas au plan $(\mathscr{P})$.

   b. Soit M un point de $(\mathscr{D})$.

   $M \in (\mathscr{P}) \iff 3(-t+1) + 2t - (-t+2) - 1 = 0 \iff -3t + 3 + 2t + t - 2 - 1 = 0$, vrai quel que soit t.

   Tout point de $(\mathscr{D})$ est un point de $(\mathscr{P})$, donc la droite $(\mathscr{D})$ est incluse dans le plan $(\mathscr{P})$.

2. **a.** Un vecteur normal au plan $(\mathscr{Q})$ est un vecteur directeur de $(\mathscr{D})$; d'après la représentation paramétrique les coordonnées d'un vecteur directeur de $(\mathscr{D})$ sont $(-1\,;\,2\,;\,-1)$.

   Une équation du plan $(\mathscr{Q})$ est donc :

   $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\mathscr{Q}) \iff -x + 2y - z + d = 0$.

   Or $C(1\,;3\,;2) \in (\mathscr{Q}) \iff -1 + 2 \times 3 - 2 + d = 0 \iff 3 + d = 0 \iff d = -3$.

   Conclusion : $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\mathscr{Q}) \iff -x + 2y - z - 3 = 0$.

   b. Soit $M(-t+1\,;\,2t\,;\,-t+2)$ un point de $(\mathscr{D})$.

   $M \in (\mathscr{Q}) \iff -(-t+1) + 2 \times 2t - (-t+2) - 3 = 0 \iff t - 1 + 4t + t - 2 - 3 = 0 \iff 6t - 6 = 0 \iff t = 1$.

   Donc le point commun I à $(\mathscr{Q})$ et à la droite $(\mathscr{D})$ a pour coordonnées $(-1+1\,;\,2 \times 1\,;\,-1+2) = (0\,;\,2\,;\,1)$.

   c. On a $\overrightarrow{CI}\ (-1\,;\,-1\,;\,-1)$.

   Donc $CI^2 = \overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{CI} = 1 + 1 + 1 = 3$.

   Conclusion $CI = \sqrt{3}$.

3. Soit t un nombre réel et M_t le point de la droite $(\mathscr{D})$ de coordonnées $(-t+1\,;\,2t\,;\,-t+2)$.

   a. On calcule les coordonnées de $\overrightarrow{CM_t}\ (-t+1-1\,;\,2t-3\,;\,-t+2-2)$ soit $(-t\,;\,2t-3\,;\,t)$.

   On a $CM_t^2 = \overrightarrow{CM_t} \cdot \overrightarrow{CM_t} = (-t)^2 + (2t-3)^2 + t^2 = t^2 + 4t^2 + 9 - 12t + t^2 = 6t^2 - 12t + 9$.

   b. $CM_t^2 = 6t^2 - 12t + 9 = 6\left(t^2 - 2t + \dfrac{9}{6}\right) = 6\left[(t^2 - 2t + 1) - 1 + \dfrac{3}{2}\right] = 6\left[(t-1)^2 + \dfrac{1}{2}\right]$.

   Le minimum de ce trinôme somme de deux carrés est obtenue lorsque le premier carré est nul soit pour $t = 1$ et la valeur minimale de trinôme est égale à $CM_t^2 = 6 \times \dfrac{1}{2} = 3 \Rightarrow CM_t = \sqrt{3}$.

   CI est bien la valeur minimale.

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. **a.** On a I$(0\,;\,1)$ et A$\left(\sqrt{3}\,;\,2\right)$; donc IA$^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + (2-1)^2 = 3+1 = 4 = 2^2 \Rightarrow$ IA $= 2$.

Le point A appartient au cercle Γ de centre le point I et de rayon 2 Pour construire le point A, il suffit de tracer l'horizontale contenant le point $(0\,;\,2)$ qui coupe le cercle Γ de centre I, de rayon 2. A est le point d'abscisse positive.

b. Par définition un point M d'affixe z a pour image M' d'affixe z' tel que $z' - z_{\text{I}} = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{2}}\left(z - z_{\text{I}}\right)$ soit $z - \text{i} = \text{i}(z - \text{i}) \iff z = \text{i}z + 1 + \text{i}$.

Donc $z_{\text{B}} = \text{i}\left(\sqrt{3} + 2\text{i}\right) + 1 + \text{i} = \text{i}\sqrt{3} - 2 + 1 + \text{i} = -1 + \text{i}\left(\sqrt{3}+1\right)$.

La rotation est une isométrie, donc IA = IB = 2, d'après la question 1. a. Le point B appartient donc au cercle Γ.

c. Par définition du milieu $x_{\text{I}} = \dfrac{x_{\text{A}} + x_{\text{C}}}{2}$ soit $0 = \dfrac{\sqrt{3} + x_{\text{C}}}{2} \iff x_{\text{C}} = -\sqrt{3}$.

De même $y_{\text{I}} = \dfrac{y_{\text{A}} + y_{\text{C}}}{2}$ soit $1 = \dfrac{2 + y_{\text{C}}}{2} \iff y_{\text{C}} = 0$.

Conclusion $z_{\text{C}} = -\sqrt{3}$.

Remarque : on aurait pu dire que C est l'image de B par la rotation r

d. Par définition de la rotation (BI) est perpendiculaire à (IA). D'autre part [AC] est un diamètre de Γ.

Dans le triangle ABC, inscrit dans le cercle Γ dont un de ses côtés est un diamètre est donc rectangle en B et (BI) étant à la fois hauteur et médiane, le triangle ABC est isocèle en B.

Le triangle ABC est rectangle isocèle en B.

2. Il semble que (BF) et (CE) sont perpendiculaires.

Démonstration :

De $\overrightarrow{\text{AE}} = \overrightarrow{\text{IB}}$ et $\overrightarrow{\text{FA}} = \overrightarrow{\text{IB}}$, on déduit que $\overrightarrow{\text{FA}} = \overrightarrow{\text{AE}}$, c'est-à-dire que A est le milieu de [EF].

D'autre part BI = IA = 2 = EA = AF : donc le triangle EIF est inscrit dans le cercle de diamètre [EF] : il est donc rectangle en I.

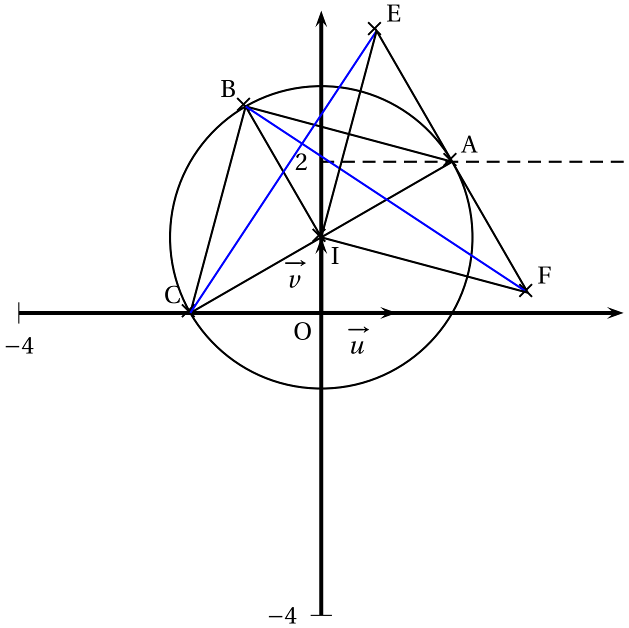
De plus (BI) $\perp$ (AC) et $\overrightarrow{\text{AE}} = \overrightarrow{\text{IB}}$ entraîne que (AE) et (IB) sont parallèles, donc (AC) est perpendiculaire à (AE). Dans le triangle EIF la droite (IA) est à la fois hauteur et médiane : ce triangle est donc rectangle isocèle en I.

Par la rotation r :

- B a pour image C

- F a pour image E

Par définition de r rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, la droite (BF) a pour image la droite perpendiculaire (CE).



EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. **a.** On sait que l'écriture complexe d'une similitude directe est $z' = az + b$.

$s(\text{O}) = \text{D} \iff 1 = 0 + b \iff b = 1$;

$s(\text{A}) = \text{E} \iff 1 + 3\text{i} = a \times (-2) + 1 \iff a = -\dfrac{3}{2}\text{i}$.

L'écriture complexe de s est donc : $z' = -\dfrac{3}{2}\text{i}z + 1$.

b. Recherche de point invariant :

$M = s(M) \iff z = -\dfrac{3}{2}\text{i}z + 1 \iff z\left(1 + \dfrac{3}{2}\text{i}\right) = 1 \iff z = \dfrac{2}{2+3\text{i}} = \dfrac{2(2-3\text{i})}{4+9} = \dfrac{2}{13}(2-3\text{i})$.

$\left\{\begin{array}{lcl} z' & = & -\dfrac{3}{2}\text{i}z + 1 \\ \dfrac{2}{13}(2-3\text{i}) & = & -\dfrac{3}{2}\text{i}\left[\dfrac{2}{13}(2-3\text{i})\right] + 1 \end{array}\right.$ entraîne par différence :

$z' - \dfrac{2}{13}(2-3\text{i}) = -\dfrac{3}{2}\text{i}\left[z - \dfrac{2}{13}(2-3\text{i})\right] \iff z' - \dfrac{2}{13}(2-3\text{i}) = \dfrac{3}{2}\text{e}^{-\frac{\pi}{2}}\left[z - \dfrac{2}{13}(2-3\text{i})\right]$.

Conclusion : l'angle de la similitude est égal à $-\dfrac{\pi}{2}$ et le rapport est égal à $\dfrac{3}{2}$.

c. On sait déjà que O a pour image D et A a pour image E.

Comme OG = 3 et OC = 1, il est aisé de voit que l'image de C est G.

Enfin OABC étant un rectangle son image par s est aussi un rectangle : c'est donc le rectangle DEFG.

2. **a.** En utilisant l'écriture complexe de s' :

$s(1) = -\dfrac{2}{3}\text{i} \times 1 + \dfrac{5}{3}\text{i} = \text{i}$;

$s(1+3\text{i}) = -\dfrac{2}{3}\text{i}(1-3\text{i}) + \dfrac{5}{3}\text{i} = -2 + \text{i}$;

$s\left(\dfrac{5}{2} + 3\text{i}\right) = -\dfrac{2}{3}\text{i}\left(\dfrac{5}{2} - 3\text{i}\right) + \dfrac{5}{3}\text{i} = -2$;

$s\left(\dfrac{5}{2}\right) = -\dfrac{2}{3}\text{i}\left(\dfrac{5}{2}\right) + \dfrac{5}{3}\text{i} = 0$.

Donc l'image du rectangle DEFG est le rectangle CBAO.

b. On a $g(\text{O}) = s'[s(\text{O})] = s'(\text{D}) = \text{C}$;

$g(\text{A}) = s'[s(\text{A})] = s'(\text{E}) = \text{B}$;

$g(\text{B}) = s'[s(\text{B})] = s'(\text{F}) = \text{A}$;

$g(\text{C}) = s'[s(\text{C})] = s'(\text{G}) = \text{O}$;

L'image du rectangle OABC par la similitude g est donc le rectangle CBAO.

c. Cherchons l'écriture complexe de g :

$g(z) = s' \circ s(z) = s'[s(z)] = s'[-\dfrac{3}{2}\text{i}z + 1] = \dfrac{2}{3}\text{i}\left(\overline{-\dfrac{3}{2}\text{i}z + 1}\right) + \dfrac{5}{3}\text{i} = \dfrac{2}{3}\text{i}\left(\dfrac{3}{2}\text{i}\overline{z} + 1\right) + \dfrac{5}{3}\text{i} = \overline{z} - \dfrac{2}{3}\text{i} + \dfrac{5}{3}\text{i} = \overline{z} + \text{i}$.

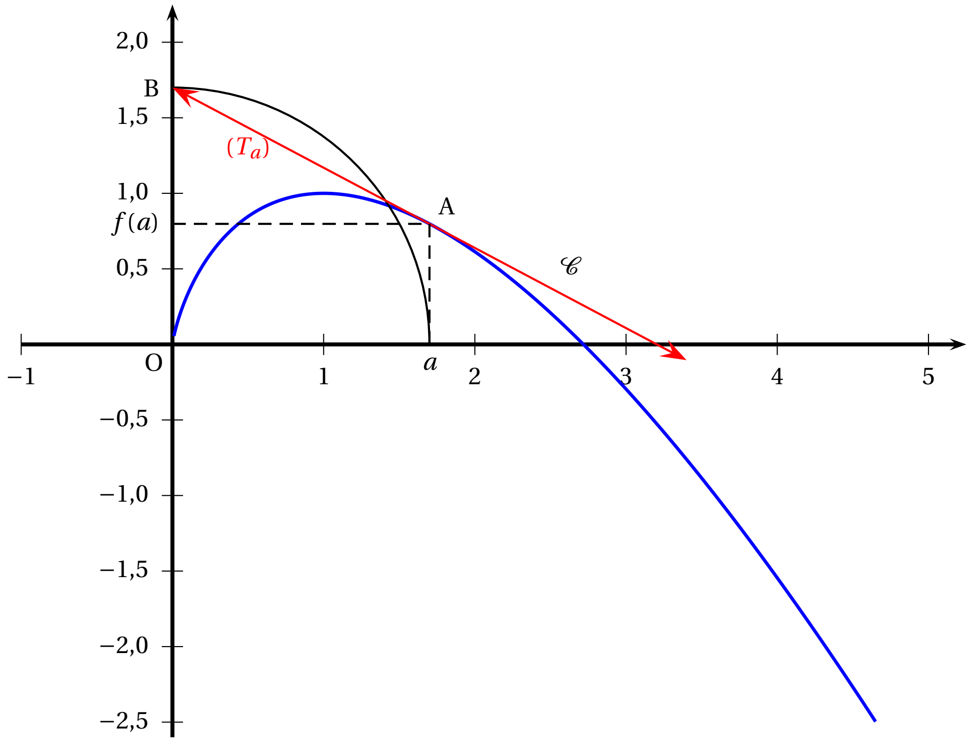
Un point M d'affixe $z = x + \text{i}y$ est invariant par g si, et seulement si :

$z = \overline{z} + \text{i} \iff x + \text{i}y = x - \text{i}y + \text{i} \iff 2y = 1 \iff y = \dfrac{1}{2}$, x étant quelconque.

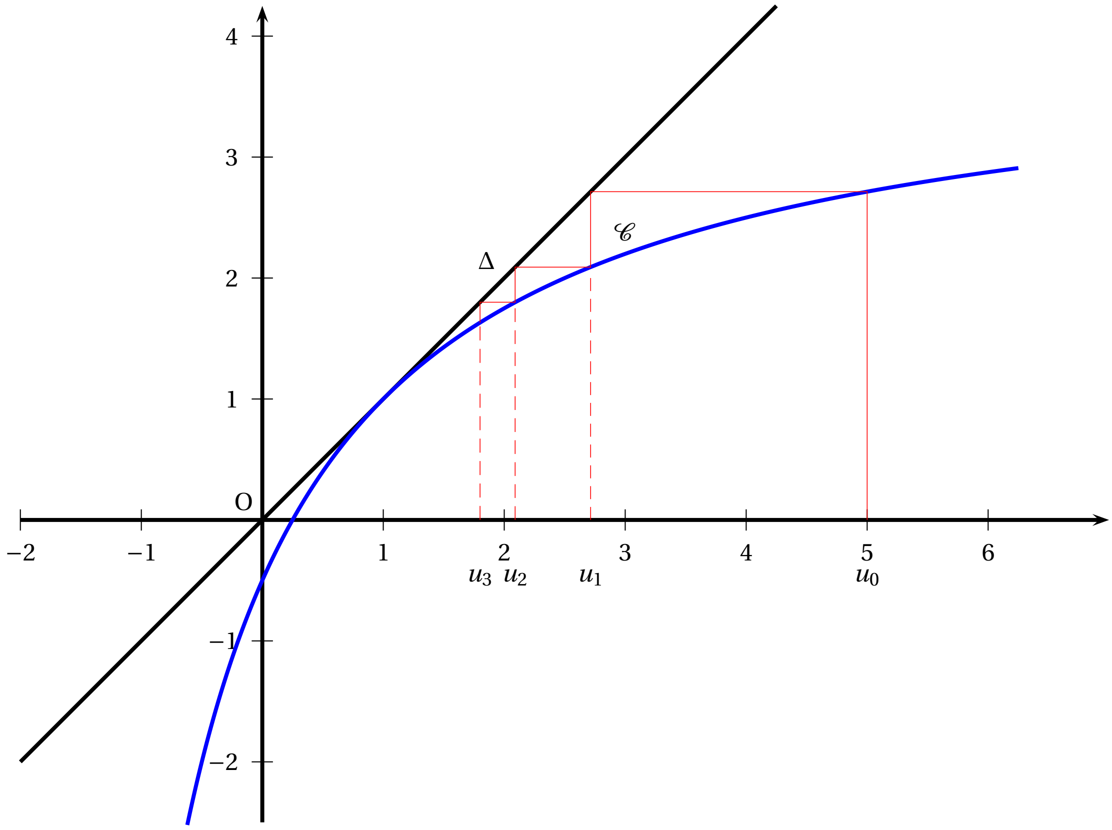
L'ensemble des points invariants par g est la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}$. Or g composée de deux similitudes est une similitude ayant une droite de points invariants : c'est la symétrie axiale autour de la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}$.

On a d'ailleurs vu au dessus que A et B d'une part O et C d'autre part s'échangent dans la similitude g : l'axe de la symétrie est donc l'un des axes de symétrie du rectangle OABC.

ANNEXE 1 (Exercice 1)
(à rendre avec la copie)



ANNEXE 2 (Exercice 2)
(à rendre avec la copie)



ANNEXE 3 (Exercice 4)
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité