

EXERCICE 1

5 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On considère les points A et B d'affixes respectives : $a = i$ et $b = 1 + i$.

On note : r_A la rotation de centre A, d'angle $\frac{\pi}{2}$, r_B la rotation de centre B, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et r_O la rotation de centre O, d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Partie A

On considère le point C d'affixe $c = 3i$. On appelle D l'image de C par r_A , G l'image de D par r_B et H l'image de C par r_O .

On note d , g et h les affixes respectives des points D, G et H.

1. Démontrer que $d = -2 + i$.
2. Déterminer g et h .
3. Démontrer que le quadrilatère CDGH est un rectangle.

Partie B

On considère un point M , distinct de O et de A, d'affixe m . On appelle N l'image de M par r_A , P l'image de N par r_B et Q l'image de M par r_O .

On note n , p et q les affixes respectives des points N , P et Q .

1. Montrer que $n = im + 1 + i$. On admettra que $p = -m + 1 + i$ et $q = -im$.

2. Montrer que le quadrilatère $MNPQ$ est un parallélogramme.

3. a. Montrer l'égalité : $\frac{m-n}{p-n} = i + \frac{1}{m}$.

b. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Déterminer l'ensemble (Γ) des points M tels que le quadrilatère $MNPQ$ soit un rectangle.

EXERCICE 2

4 points

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

Une salle informatique d'un établissement scolaire est équipée de 25 ordinateurs dont 3 sont défectueux. Tous les ordinateurs ont la même probabilité d'être choisis.

On choisit au hasard deux ordinateurs de cette salle.

Quelle est la probabilité que ces deux ordinateurs soient défectueux ?

Partie B

La durée de vie d'un ordinateur (c'est-à-dire la durée de fonctionnement avant la première panne), est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.

Ainsi, pour tout réel t positif, la probabilité qu'un ordinateur ait une durée de vie inférieure à t années, notée $p(X \leq t)$, est donnée par : $p(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$.

1. Déterminer λ sachant que $p(X > 5) = 0,4$.
2. Dans cette question, on prendra $\lambda = 0,18$.
Sachant qu'un ordinateur n'a pas eu de panne au cours des 3 premières années, quelle est, à 10^{-3} près, la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à 5 ans ?
3. Dans cette question, on admet que la durée de vie d'un ordinateur est indépendante de celle des autres et que $p(X > 5) = 0,4$.
 - a. On considère un lot de 10 ordinateurs.
Quelle est la probabilité que, dans ce lot, l'un au moins des ordinateurs ait une durée de vie supérieure à 5 ans ? On donnera une valeur arrondie au millième de cette probabilité.
 - b. Quel nombre minimal d'ordinateurs doit-on choisir pour que la probabilité de l'évènement « l'un au moins d'entre eux a une durée de vie supérieure à 5 ans » soit supérieure à 0,999 ?

EXERCICE 3**5 points****Partie A : Restitution organisée de connaissances**

On considère trois points A, B et C de l'espace et trois réels a, b et c de somme non nulle.

Démontrer que, pour tout réel k strictement positif, l'ensemble des points M de l'espace tels que $\|a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}\| = k$ est une sphère dont le centre est le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients respectifs a, b et c .

Partie B

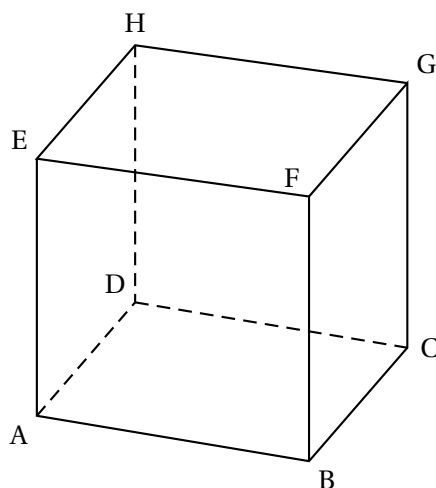
On considère le cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1 représenté ci-dessous.

Il n'est pas demandé de rendre le graphique avec la copie.

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. Démontrer que le vecteur \vec{n} de coordonnées $(1 ; 0 ; 1)$ est un vecteur normal au plan (BCE).
2. Déterminer une équation du plan (BCE).
3. On note (Δ) la droite perpendiculaire en E au plan (BCE).
Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) .
4. Démontrer que la droite (Δ) est sécante au plan (ABC) en un point R, symétrique de B par rapport à A.
5. a. Démontrer que le point D est le barycentre des points R, B et C affectés des coefficients respectifs 1, -1 et 2.

- b. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble (S) des points M de l'espace tels que $\|\overrightarrow{MR} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = 2\sqrt{2}$.
- c. Démontrer que les points B, E et G appartiennent à l'ensemble (S).
- d. Démontrer que l'intersection du plan (BCE) et de l'ensemble (S) est un cercle dont on précisera le rayon.

**EXERCICE 3****Enseignement de spécialité****5 points****Partie A : Restitution organisée de connaissances**

Démontrer le théorème de Gauss en utilisant le théorème de Bézout.

Partie B

On rappelle la propriété connue sous le nom de petit théorème de Fermat :

« Si p est un nombre premier et q un entier naturel premier avec p , alors $q^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ ».

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1.$$

1. Calculer les six premiers termes de la suite.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, u_n est pair.
3. Montrer que, pour tout entier naturel n pair non nul, u_n est divisible par 4.
On note (E) l'ensemble des nombres premiers qui divisent au moins un terme de la suite (u_n) .
4. Les entiers 2, 3, 5 et 7 appartiennent-ils à l'ensemble (E) ?
5. Soit p un nombre premier strictement supérieur à 3.
 - a. Montrer que : $6 \times 2^{p-2} \equiv 3 \pmod{p}$ et $6 \times 3^{p-2} \equiv 2 \pmod{p}$.
 - b. En déduire que $6u_{p-2} \equiv 0 \pmod{p}$.
 - c. Le nombre p appartient-il à l'ensemble (E) ?

EXERCICE 4

6 points

Partie A

On considère la fonction g définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$$g(x) = e^x - x - 1.$$

1. Étudier les variations de la fonction g .
2. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .
3. En déduire que pour tout x de $[0 ; +\infty[$, $e^x - x > 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[0 ; 1]$ par

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}.$$

La courbe (\mathcal{C}) représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal est donnée en annexe.

Cette annexe sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

On admet que f est strictement croissante sur $[0 ; 1]$.

1. Montrer que pour tout x de $[0 ; 1]$, $f(x) \in [0 ; 1]$.
2. Soit (D) la droite d'équation $y = x$.
 - a. Montrer que pour tout x de $[0 ; 1]$, $f(x) - x = \frac{(1-x)g(x)}{e^x - x}$.
 - b. Étudier la position relative de la droite (D) et de la courbe (\mathcal{C}) sur $[0 ; 1]$.
3.
 - a. Déterminer une primitive de f sur $[0 ; 1]$.
 - b. Calculer l'aire, en unités d'aire, du domaine du plan délimité par la courbe (\mathcal{C}), la droite (CD) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Partie C

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= \frac{1}{2} \\ u_{n+1} &= f(u_n), \text{ pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

1. Construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite en laissant apparents les traits de construction.
2. Montrer que pour tout entier naturel n , $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

ANNEXE

Cette page sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve

EXERCICE 4

