

Correction du baccalauréat S (obligatoire)

Polynésie

10 juin 2011

Exercice 1

5 points

Commun à tous les candidats.

Méthode 1 :

Le dessin suggère de considérer la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Son écriture complexe est : $z' - z_A = i(z - z_A) \iff z' - 2 + 5i = i(z - 2 + 5i)$.

1. L'image B' du point B dans cette rotation a donc pour affixe :

$$z_{B'} - 2 + 5i = i(7 - 3i - 2 + 5i) \iff$$

$$z_{B'} = 2 - 5i + 5i - 2 = 0.$$

L'image de B dans la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ est le point O. Ceci démontre que le triangle ABO est isocèle et rectangle en A.

Méthode 2 : $OA^2 = |z_A|^2 = 2^2 + 5^2 = 29$;

$$AB^2 = |z_B - z_A|^2 = |7 - 3i - 2 + 5i|^2 = |5 + 2i|^2 = 25 + 4 = 29 ;$$

$$OB^2 = |z_B|^2 = |7 - 3i|^2 = 7^2 + 3^2 = 49 + 9 = 58.$$

D'une part $OA^2 = AB^2 \iff AO = AB \iff ABO$ est isocèle en A ;

D'autre part $29 + 29 = 58 \iff OA^2 + AB^2 = OB^2 \iff ABO$ est rectangle en A d'après la réciproque du théorème de Pythagore.

Méthode 3 :

$$\text{Soit } Z = \frac{z_O - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-2 + 5i}{5 + 2i} = \frac{i(2i + 5)}{2i + 5} = i.$$

On a $Z = \frac{AO}{AB} = 1$, soit $AO = AB$;

De plus $\arg(Z) = (\widehat{AB}, \widehat{AO}) = \frac{\pi}{2}$ ce qui montre que l'angle \widehat{BAO} est droit. Le triangle ABO est donc rectangle isocèle en A.

Méthode 4 :

$\frac{z_O - z_A}{z_B - z_A} = \frac{z_O - z_A}{z_B - z_A} = i$ signifie que O est l'image de B dans la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

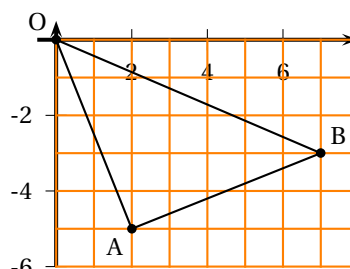
2. Soient A et B les points d'affixes respectives i et $-2i$.

On a $|z - i| = |z + 2i| \iff AM = BM \iff M \in \Delta$ médiatrice de [AB]. mais comme A et B appartiennent à l'axe des ordonnées, la médiatrice de [AB] (d'équation $y = -\frac{1}{2}$) est parallèle à l'axe des abscisses. La proposition est vraie.

3. $z = 3 + i\sqrt{3}$, donc $|z|^2 = 9 + 3 = 12 = (2\sqrt{3})^2 \Rightarrow |z| = 2\sqrt{3}$. On peut en factorisant ce module écrire :

$$z = 2\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \right) = 2\sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2\sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

Donc, pour $n \in \mathbb{N}$, $z^{3n} = (2\sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{6}})^{3n} = (2\sqrt{3})^{3n} e^{i\frac{3n\pi}{6}} = (2\sqrt{3})^{3n} e^{i\frac{n\pi}{2}}$. Or $e^{i\frac{n\pi}{2}}$ est égal à i , -1 , $-i$ ou 1 suivant les valeurs de n et la puissance n'est donc un nombre imaginaire que pour n impair. La proposition est fausse.



4. Soit z un nombre complexe non nul d'argument $\frac{\pi}{2}$. On peut donc écrire $z = \rho i$ avec ρ réel positif non nul.

$$\text{Donc } |i+z| = 1+|z| \iff |i+\rho i| = 1+|\rho i| \iff |i(1+\rho)| = 1+|\rho i| \iff 1+\rho = 1+\rho$$

qui est bien vraie.

La proposition 4 est vraie.

5. Soit z un nombre complexe non nul.

Si le module de z est égal à 1 alors z s'écrit $z = e^{i\theta}$, avec $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\text{Donc } z^2 + \frac{1}{z^2} = e^{2i\theta} + \frac{1}{e^{2i\theta}} = e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} = \cos 2\theta + i \sin 2\theta + \cos 2\theta - i \sin 2\theta = 2 \cos 2\theta$$

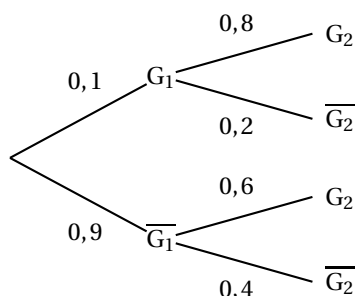
qui est un réel.

Exercice 2

5 points

Enseignement obligatoire

1. On a l'arbre pondéré suivant :



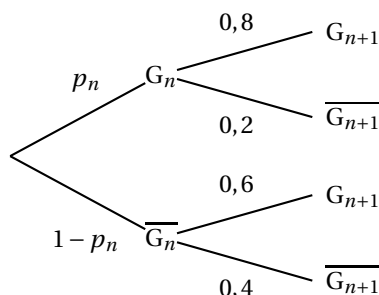
2. On a $p_2 = p(G_1 \cap G_2) + p(\overline{G_1} \cap G_2) = p(G_1) \times p_{G_1}(G_2) + p(\overline{G_1}) \times p_{\overline{G_1}}(G_2) = 0,1 \times 0,8 + 0,9 \times 0,6 = 0,08 + 0,54 = 0,62$.

3. Il faut trouver $p_{G_2}(\overline{G_1}) = \frac{p(\overline{G_1} \cap G_2)}{p(G_2)} = \frac{0,54}{0,62} = \frac{27}{31}$.

4. La probabilité que le joueur ne gagne aucune des trois parties est égale à $0,9 \times 0,4 \times 0,4 = 0,144$.

La probabilité qu'il gagne au moins une partie est donc égale à $1 - 0,144 = 0,856$.

5. À la partie n , on a l'arbre suivant :



$$\text{On a donc } p_{n+1} = p(G_n \cap G_{n+1}) + p(\overline{G_n} \cap G_{n+1}) = p(G_n) \times p_{G_n}(G_{n+1}) + p(\overline{G_n}) \times p_{\overline{G_n}}(G_{n+1}) = p_n \times 0,8 + (1 - p_n) \times 0,6 = 0,8p_n + 0,6 - 0,6p_n = 0,2p_n + 0,6 = \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5}$$

6. *Initialisation* On a bien $\frac{3}{4} - \frac{13}{4} \left(\frac{1}{5}\right)^1 = \frac{3}{4} - \frac{13}{20} = \frac{15-13}{20} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10} = 0,1 = p_1$.

Hérédité

Supposons qu'il existe $a \in \mathbb{N}$, $a > 1$ tel que $p_a = \frac{3}{4} - \frac{13}{4} \left(\frac{1}{5}\right)^a$.

D'après la formule démontrée à la question 4 :

$$p_{a+1} = \frac{1}{5}p_a + \frac{3}{5} = \frac{1}{5} \left[\frac{3}{4} - \frac{13}{4} \left(\frac{1}{5}\right)^a \right] + \frac{3}{5} = \frac{3}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{5} - \frac{13}{4} \left(\frac{1}{5}\right)^{a+1} = \frac{3}{20} + \frac{12}{20} - \frac{13}{4} \left(\frac{1}{5}\right)^{a+1} = \frac{3}{4} - \frac{13}{4} \left(\frac{1}{5}\right)^{a+1}. \text{ La propriété est vraie au rang } a+1.$$

On a donc démontré par récurrence que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{4} \left(\frac{1}{5}\right)^n$.

7. Comme $-1 < \frac{1}{5} < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{3}{4} = 0,75$.

8. On a : $\frac{3}{4} - p_n < 10^{-7} \iff \frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4} - \frac{13}{4} \left(\frac{1}{5}\right)^n \right) < 10^{-7} \iff \frac{13}{4} \left(\frac{1}{5}\right)^n < 10^{-7} \iff$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^n < \frac{4}{13} \times 10^{-7} \iff \text{(par croissance de la fonction logarithme népérien)}$$

$$n \ln \left(\frac{1}{5}\right) < \ln \left(\frac{4 \times 10^{-7}}{13}\right) \iff n > \frac{\ln \left(\frac{4 \times 10^{-7}}{13}\right)}{\ln \left(\frac{1}{5}\right)}.$$

$$\text{Or } \frac{\ln \left(\frac{4 \times 10^{-7}}{13}\right)}{\ln \left(\frac{1}{5}\right)} \approx 10,7.$$

Donc u_{11} approche la limite $\frac{3}{4}$ à moins de 10^{-7} .

Exercice 2

5 points

Enseignement de spécialité

1. $u_1 = 10u_0 + 21$ or $u_0 = 1$ donc $u_1 = 10 \times 1 + 21 = 31$;

$$u_2 = 10u_1 + 21 = 10 \times 31 + 21 = 331 ;$$

$$u_3 = 10u_2 + 21 = 10 \times 331 + 21 = 3331.$$

2. a.

• Initialisation $10^{0+1} - 7 = 10 - 7 = 3 = 3 \times 1 = 3u_0$ donc on a bien la propriété vraie au rang 0.

• Hérédité : Supposons que pour un entier naturel n , $3u_n = 10^{n+1} - 7$ alors

$$3u_{n+1} = 3(10u_n + 21) = 10 \times (3u_n) + 63 = 10(10^{n+1} - 7) + 63 = 10^{(n+1)+1} - 70 + 63 = 10^{(n+1)+1} - 7$$

La propriété est donc bien héréditaire.

• La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout naturel n : $3u_n = 10^{n+1} - 7$.

b. Pour tout naturel n , $\frac{10^{n+1} - 1}{10 - 1} = \sum_{k=0}^{k=n} 10^k$ donc $3u_n = \sum_{k=0}^{k=n} 9 \times 10^k - 6 =$

$$\sum_{k=1}^{k=n} 9 \times 10^k + 10 - 6 = \sum_{k=1}^{k=n} 9 \times 10^k + 3 = 99 \dots 93 \text{ et donc } u_n = \sum_{k=1}^{k=n} 3 \times 10^k + 1 =$$

$$\underbrace{33 \dots 3}_n 1 \text{ avec } n \text{ chiffres } 3.$$

n chiffres

3. $u_2 = 331$ avec $\sqrt{331} \approx 18,2$ or 331 n'est divisible ni par 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 : les nombres premiers inférieurs ou égaux à 18. u_2 est donc premier.

4. D'après 2.a., pour tout naturel n , $u_n = 33\dots31$ avec n chiffres 3
- Le chiffre des unités de u_n est 1, impair, donc 2 ne divise pas u_n .
 - La somme de ses chiffres est $3+3+\dots+3+1 \equiv 1 \pmod{3}$ donc 3 ne divise pas u_n .
 - Le chiffre des unités de u_n est 1, différent de 0 et 5, donc 5 ne divise pas u_n .
- a. $10 = -1 + 11$ et $-7 = 4 - 11$ donc $10 \equiv -1$ et $-7 \equiv 4 \pmod{11}$,
donc $3u_n = 10^{n+1} - 7 \equiv (-1)^{n+1} + 4 \equiv (-1)^1(-1)^n + 4 \equiv 4 - (-1)^n \pmod{11}$
- b. Si u_n était divisible par 11 alors $3u_n$ le serait a fortiori, or pour n pair $3u_n \equiv 4 - 1 \equiv 3 \pmod{11}$ et pour n impair $3u_n \equiv 4 - (-1) \equiv 5 \pmod{11}$ donc 11 ne divise pas u_n .
5. a. 17 est un nombre premier qui ne divise pas 16 donc d'après le petit théorème de Fermat, $10^{16} \equiv 1 \pmod{17}$.
- b. Pour tout naturel k , $3u_{16k+8} = 10^{16k+9} - 7 = (10^{16})^k \times 10^9 - 7 \equiv 1^k \times 10^9 - 7 \pmod{17}$. Or $6 \times 17 = 102$ donc $10^2 \equiv -2 \pmod{17}$ donc $10^9 = 10 \times (10^2)^4 \equiv 10(-2)^4 \equiv 10 \times 16 \equiv 10(-1) \equiv -10$ et donc $3u_{16k+8} \equiv -10 - 7 \equiv -17 \equiv 0 \pmod{17}$ donc 17 divise $3u_{16k+8}$. Or 17 est premier avec 3 et d'après le théorème de Gauss, 17 divise u_{16k+8} .

Exercice 3

5 points

Enseignement obligatoire

Partie A : Restitution organisée de connaissances On supposera connus les résultats suivants :

Démonstration classique basée sur l'intégrale de la fonction continue $(uv)' = u'v + uv'$.

Partie B

1. a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ entraînent $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- b. f produit de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$ est dérivable sur cet intervalle et
- $$f'(x) = 2x \ln x + x^2 \times \frac{1}{x} = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1).$$
- Or $x > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $2 \ln x + 1$ et :
- $$2 \ln x + 1 > 0 \iff \ln x > -\frac{1}{2} \iff (\text{par croissance de la fonction exponentielle}) x > e^{-\frac{1}{2}}.$$
- Donc f est croissante sur $]e^{-\frac{1}{2}}; +\infty[$.
- De même $2 \ln x + 1 < 0 \iff \ln x < -\frac{1}{2} \iff (\text{par croissance de la fonction exponentielle}) x < e^{-\frac{1}{2}}$.
- Donc f est décroissante sur $]0; e^{-\frac{1}{2}}[$.
- Rem. On peut écrire $e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$.
2. Une équation de la tangente (\mathcal{T}_{x_0}) à (\mathcal{C}) en un point de coordonnées $(x_0; x_0^2 \ln x_0)$ est :
- $$M(X; Y) \in (\mathcal{T}_{x_0}) \iff Y - (x_0^2 \ln x_0) = f'(x_0)(X - x_0).$$
- En particulier $O(0; 0) \in (\mathcal{T}_{x_0}) \iff 0 - (x_0^2 \ln x_0) = x_0(2 \ln x_0 + 1)(0 - x_0) \iff -x_0^2 \ln x_0 = -2x_0^2 \ln x_0 - x_0^2 \iff x_0^2 + x_0^2 \ln x_0 = 0 \iff x_0^2(1 + \ln x_0) = 0 \iff 1 + \ln x_0 = 0$, car la solution $x_0 = 0$ n'est pas possible.

Finalement : $1 + \ln x_0 = 0 \iff \ln x_0 = -1 \iff x_0 = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

Il existe donc une tangente unique ($\mathcal{T}_{e^{-1}}$) à la courbe (\mathcal{C}) passant par O. Une de ses équations est :

$$M(x; y) \in (\mathcal{T}_{e^{-1}}) \iff Y = -\frac{1}{e}X.$$

3. a. Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{x^5}{25}(5 \ln x - 1)$. Cette fonction produit de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$ est dérivable et sur cet intervalle :

$$g'(x) = \frac{5x^4}{25}(5 \ln x - 1) + \frac{x^5}{25} \times \frac{5}{x} = x^4 \ln x - \frac{x^4}{5} + \frac{x^4}{5} = x^4 \ln x.$$

Conclusion la fonction g est une primitive de la fonction $x \mapsto x^4 \ln x$ sur $]0; +\infty[$.

b. On a $V = \int_{\frac{1}{e}}^1 \pi [x^2 \ln x]^2 dx = \int_{\frac{1}{e}}^1 \pi x^4 \ln x \times \ln x dx.$

$$\text{Soient } \begin{cases} u'(x) = x^4 \ln x \\ v(x) = \ln x \end{cases} \quad \text{d'où } \begin{cases} u(x) = \frac{x^5}{25}(5 \ln x - 1) \\ v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$$

On a donc en intégrant par parties puisque toutes les fonctions $u(x), u'(x), v(x)$ et $v'(x)$ sont continues sur $]0; +\infty[$:

$$V = \pi \left[\frac{x^5}{25}(5 \ln x - 1) \times \ln x \right]_{\frac{1}{e}}^1 - \pi \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{x^5}{25}(5 \ln x - 1) \times \frac{1}{x} dx =$$

$$\frac{\pi}{25} [x^5(5 \ln x - 1) \times \ln x]_{\frac{1}{e}}^1 - \pi \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{1}{5} x^4 \ln x dx + \pi \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{x^4}{25} dx =$$

$$\frac{\pi}{25} \left[0 - \left(\frac{6}{e^5} \right) \right] - \pi \frac{1}{25} \left[\frac{5x^5}{25}(5 \ln x - 1) - \frac{1}{5}x^5 \right]_{\frac{1}{e}}^1 =$$

$$-\frac{6\pi}{25e^5} - \frac{\pi}{25} \left[\frac{1}{5}(5 \ln 1 - 1) - \frac{1}{5} \right] - \left[\frac{1}{5e^5} \left(5 \ln \frac{1}{e} - 1 \right) - \frac{1}{5e^5} \right] = -\frac{6\pi}{25e^5} - \frac{\pi}{25} \left[-\frac{2}{5} - \left(-\frac{7}{5}e^5 \right) \right] =$$

$$\frac{2\pi}{125} - \frac{37\pi}{125e^5} = \frac{\pi}{125} \left(2 - \frac{37}{e^5} \right).$$

Exercice 4

5 points

Enseignement obligatoire

Partie A

1. Comme $1 + 2 \neq 0$, K existe et est défini par $\overrightarrow{1KD} + 2\overrightarrow{KF} = \overrightarrow{0} \iff 3\overrightarrow{KD} + 2\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{0} \iff 3\overrightarrow{DK} = 2\overrightarrow{DF} \iff \overrightarrow{DK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DF}$

Comme $D(0; 0; 0)$ et $F(1; 1; 1)$, l'égalité précédente donne :

$$x_K = \frac{2}{3}(1) = \frac{2}{3}$$

$$y_K = \frac{2}{3}(1) = \frac{2}{3}$$

$$z_K = \frac{2}{3}(1) = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Donc } K\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right).$$

2. $E(1; 0; 1)$ donc $\vec{EK} \left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{1}{3} \right)$ et $\vec{DF}(1; 1; 1)$.

$$\text{Donc } \vec{EK} \cdot \vec{DF} = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = 0.$$

Les vecteurs sont orthogonaux donc les droites (EK) et (DF) sont orthogonales.

3. On a $EK^2 = \|\vec{EK}\|^2 = \vec{EK} \cdot \vec{EK} = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{6}{9} \Rightarrow EK = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Partie B

1. Quel que soit le point M , la base EMF du tétraèdre $EMFD$ est incluse dans la face supérieure du cube $EFGH$ qui est perpendiculaire à l'arête $[DH]$ qui est donc une hauteur du tétraèdre relative à la base EMF .

Quelle que soit la position du point M , l'aire de la base est l'aire d'un triangle de base 1 et de hauteur $[EH]$ dont la longueur est aussi 1. On a donc :

$$\mathcal{A}(EMH) = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{D'où le volume cherché : } \mathcal{V}(EMFD) = \frac{\frac{1}{2} \times 1}{3} = \frac{1}{6}.$$

2. Par définition de M , M , F et D ne sont pas alignés : ils définissent donc un plan unique.

On a $M(0; m; 1)$; donc $M(0; m; 1) \in MFD \iff (-1+m) \times 0 + m - m \times 1 = 0$ qui est vraie.

$F(1; 1; 1)$; donc $F(1; 1; 1) \in MFD \iff (-1+m) \times 1 + 1 - m \times 1 = 0$ qui est vraie.

Enfin $D(0; 0; 0) \in MFD \iff (-1+m) \times 0 + 0 - m \times 0 = 0$ qui est vraie.

Conclusion : $(-1+m)x + y - mz = 0$ est bien une équation du plan (MFD).

3. a. On sait que $d_m = d(E; (MFD)) = \frac{|(-1+m)x_E + y_E - mz_E|}{\sqrt{(-1+m)^2 + 1^2 + m^2}} =$

$$\frac{|(-1+m+0-m)|}{\sqrt{1+2m^2-2m+1}} = \frac{1}{\sqrt{2m^2-2m+2}}.$$

- b. La distance maximale correspond à la valeur minimale de $\sqrt{2m^2-2m+2}$ c'est-à-dire du trinôme $2m^2-2m+2$.

$$\text{Or } 2m^2-2m+2 = 2(m^2-m+1) = 2\left[\left(m-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1\right] = 2\left[\left(m-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right].$$

La valeur minimale de cette somme de deux carrés est obtenue quand le premier carré est nul, soit quand $m = \frac{1}{2}$ (valeur possible puisque

$$0 \leq m \leq 1) \text{ et le minimum vaut alors } \frac{3}{2}.$$

$$\text{La distance minimale est donc égale à } \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

c. Or $\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3} = EK$.

D'autre part on sait que le barycentre K appartient à la droite (DF) donc au plan (MFD).

Lorsque la distance du point K au plan (MFD) est maximale, soit quand M est le milieu de $[HG]$, le point K est le projeté orthogonal du point E sur le plan (MFD).

