

ÉQUATIONS IRRATIONNELLES

1 Équation du type $\sqrt{A(x)} = \sqrt{B(x)}$.

Propriété 1 : L'équation $\sqrt{A(x)} = \sqrt{B(x)}$ est définie, si et seulement si :

$$A(x) \geq 0 \quad \text{et} \quad B(x) \geq 0$$

On en déduit alors l'ensemble de définition D_f de l'équation.

On élève ensuite au carré, en remarquant qu'il y a équivalence que si $x \in D_f$

Exemples :

1) Résoudre : $\sqrt{4x-1} = \sqrt{3-x}$

- On détermine l'ensemble de définition D_f

$$\begin{cases} 4x-1 \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{4} \\ x \leq 3 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad D_f = \left[\frac{1}{4}; 3 \right]$$

- On élève au carré : $x \in D_f$ et $4x-1 = 3-x \Leftrightarrow 5x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{5}$

$$\frac{4}{5} \in D_f \quad \text{donc} \quad S = \left\{ \frac{4}{5} \right\}$$



2) Résoudre l'équation suivante : $\sqrt{x+12} = \sqrt{x^2+2x-8}$

- L'ensemble de définition de l'équation vérifie : $\begin{cases} x+12 \geq 0 \\ x^2+2x-8 \geq 0 \end{cases}$

La première inéquation ne pose pas de problème. Il faut déterminer les racines de la deuxième : $x^2+2x-8 \geq 0$

$x_1 = 2$ racine évidente car $2^2 + 2 \times 2 - 8 = 0$

le produit des racines $P = -8$, donc $x_2 = -4$

Comme on veut que la quantité soit positive ou nulle et que $a = 1$, on prend à l'extérieur des racines $] -\infty; -4] \cup [2; +\infty[$

Le système devient alors : $\begin{cases} x \geq -12 \\ x \in] -\infty; -4] \cup [2; +\infty[\end{cases}$

L'ensemble de définition est donc : $D_f = [-12; -4] \cup [2; +\infty[$

- On élève au carré : $x \in D_f$, $x + 12 = x^2 + 2x - 8 \Leftrightarrow -x^2 - x + 20 = 0$

On calcule : $\Delta = 1 + 80 = 81 = 9^2$, $\Delta > 0$, on a deux racines :

$$x_1 = \frac{1+9}{-2} = -5 \in D_f \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1-9}{-2} = 4 \in D_f \quad \text{donc} \quad S = \{-5; 4\}$$

2 Équation du type $\sqrt{A(x)} = B(x)$

Propriété 2 : L'équation $\sqrt{A(x)} = B(x)$ est définie, si et seulement si :

$$A(x) \geq 0 \quad \text{et} \quad B(x) \geq 0$$

Cependant la première condition est superflue. Si on élève au carré l'équation, on obtient : $A(x) = [B(x)]^2$

Si cette égalité est vérifiée alors $A(x)$ est nécessairement positif ou nul.

L'équation est donc équivalente à : $B(x) \geq 0$ et $A(x) = [B(x)]^2$

Exemples :

1) Soit l'équation suivante : $\sqrt{x^2 - 1} = x + 2$

- On détermine l'ensemble de définition :

$$x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2 \Leftrightarrow D_f = [-2; +\infty[$$

- On élève au carré : $x \in D_f$ et

$$x^2 - 1 = (x + 2)^2 \Leftrightarrow x^2 - 1 = x^2 + 4x + 4 \Leftrightarrow -4x = 5 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{4}$$

$$-\frac{5}{4} \in D_f \quad \text{donc} \quad S = \left\{ -\frac{5}{4} \right\}$$

2) Soit l'équation suivante : $\sqrt{4 - x} = x - 2$

- On détermine l'ensemble de définition :

$$x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2 \Leftrightarrow D_f = [2; +\infty[$$

- On élève au carré : $x \in D_f$ et

$$4 - x = (x - 2)^2 \Leftrightarrow 4 - x = x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow x(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 3$$

$$0 \notin D_f \quad \text{et} \quad 3 \in D_f \quad \text{donc} \quad S = \{3\}$$

3 Exercices

a) $\sqrt{x - 4} = x + 1$

c) $\sqrt{2x - 6} = x - 7$

b) $\sqrt{x^2 - 12} = 2x - 1$

d) $\sqrt{x + 12} = \sqrt{x^2 + 2x - 8}$

e) $\sqrt{3x + 3} = \sqrt{x^2 + x - 8}$

4 Correction des exercices

a) Condition : $x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1 \Leftrightarrow D_f = [-1; +\infty[$

$$x \in D_f, x - 4 = x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 + x + 5 = 0, \Delta = -19 < 0 \Leftrightarrow S = \emptyset$$

b) Condition : $2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow D_f = \left[\frac{1}{2}; +\infty[$

$$x \in D_f, x^2 - 12 = 4x^2 - 4x + 1 \Leftrightarrow 3x^2 + 8x + 1 = 0, \Delta = 52 = (2\sqrt{13})^2$$

$$x_1 = \frac{-8 + 2\sqrt{13}}{6} = \frac{-4 + \sqrt{13}}{3} \notin D_f \quad \text{ou} \quad x_2 = \frac{-4 - \sqrt{13}}{3} \notin D_f \Rightarrow S = \emptyset$$

c) Condition : $x - 7 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 7 \Leftrightarrow D_f = [7; +\infty[$

$$x \in D_f, 2x - 6 = x^2 - 14x + 49 \Leftrightarrow x^2 - 16x + 55 = 0, \Delta = 36 = 6^2$$

$$x_1 = \frac{16 + 6}{2} = 11 \in D_f \quad \text{ou} \quad x_2 = \frac{16 - 6}{2} = 5 \notin D_f \Rightarrow S = \{11\}$$

d) Conditions : $x + 12 \geq 0$ et $x^2 + 2x - 8 \geq 0$

$$\text{Racines de : } x^2 + 2x - 8 = 0, \Delta = 36 \Rightarrow x_1 = 2 \text{ ou } x_2 = -4$$

$$\text{Donc : } \begin{cases} x \geq -12 \\ x \in]-\infty; -4] \cup [2; +\infty[\end{cases} \Leftrightarrow D_f = [-12; -4] \cup [2; +\infty[$$

$$x \in D_f, x + 12 = x^2 + 2x - 8 \Leftrightarrow x^2 + x - 20 = 0, \Delta = 81 = 9^2$$

$$x_1 = \frac{-1 + 9}{2} = 4 \in D_f \quad \text{ou} \quad x_2 = \frac{-2 - 9}{2} = -5 \in D_f \Rightarrow S = \{-5; 4\}$$

e) Conditions : $3x + 3 \geq 0$ et $x^2 + x - 8 \geq 0$

$$\text{Racines de : } x^2 + x - 8 = 0, \Delta = 33 \Rightarrow$$

$$x' = \frac{-1 + \sqrt{33}}{2} \simeq 2,37 \quad \text{ou} \quad x'' = \frac{-1 - \sqrt{33}}{2} \simeq -3,37$$

$$\text{Donc : } \begin{cases} x \geq -1 \\ x \in]-\infty; -x''] \cup [x'; +\infty[\end{cases} \Leftrightarrow D_f = \left[\frac{-1 + \sqrt{33}}{2}; +\infty[$$

$$x \in D_f, 3x + 3 = x^2 + x - 8 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 11 = 0, \Delta = 48 = (4\sqrt{3})^2$$

$$x_1 = \frac{2 + 4\sqrt{3}}{2} = 1 + 2\sqrt{3} \simeq 4,46 \in D_f \quad \text{ou} \quad x_2 = 1 - 2\sqrt{3} \simeq -2,46 \notin D_f \Rightarrow$$

$$S = \{1 + 2\sqrt{3}\}$$