Le paradoxe du Grand Duc de Toscane

1 Contexte historique

Galilée (1554-1642) est surtout connu pour ses travaux en astronomie, faisant suite à son invention de la lunette astronomique. Cependant, il rédigea vers 1620 un petit mémoire sur les jeux de dés pour répondre à une demande du Duc de Toscane (Galilée est alors Premier Mathématicien de l'Université de Pise et Premier Philosophe du Grand Duc à Florence). Galilée est ainsi l'un des premiers avec Cardan à avoir écrit sur le "*calcul des hasards*", mais leurs écrits n'ont été publiés qu'après la célèbre correspondance entre Pascal et Fermat qui marque "*officiellement*" le début de la théorie des probabilités. Le mémoire de Galilée qui nous intéresse n'a été édité qu'en 1718.

2 Présentation du paradoxe

A la cour de Florence, de nombreux jeux de société étaient alors pratiqués. Parmi ceux-ci, l'un faisait intervenir la somme des numéros sortis lors du lancer de trois dés. Le Duc de Toscane, qui avait sans doute observé un grand nombre de parties de ce jeu, avait constaté que la somme 10 était obtenue légèrement plus souvent que la somme 9. Le paradoxe, que le Duc avait exposé à Galilée, réside dans le fait qu'il y a autant de façons d'écrire 10 que 9 comme sommes de trois entiers compris entre 1 et 6 :

$$\begin{aligned} 10 &= 6+3+1 = 6+2+2 \\ &= 5+4+1 = 5+3+2 \\ &= 4+4+2 = 4+3+3 \end{aligned}$$

(6 possibilités)

$$\begin{aligned} 9 &= 6+2+1 = 5+3+1 \\ &= 5+2+2 = 4+4+1 \\ &= 4+3+2 = 3+3+3 \end{aligned}$$

(6 possibilités)

3 Simulation

On peut proposer l'algorithme suivant pour simuler n lancers de trois dés afin de comparer l'évolution des fréquences des sommes 9 et 10. X représente alors le nombre de sommes égales à 9 et Y le nombre de sommes égales à 10. On est alors dans une position d'observateur actif nettement plus privilégiée que celle du Grand Duc : on peut observer que, pour n "*très grand*", la fréquence d'obtention de la somme 10 semble "*presque sûrement*" supérieure à celle de la somme 9.

- Pour $n = 100$ on obtient :
  $X = 0,12$ et $Y = 0,16$

- Pour $n = 1\,000$ on obtient :
  $X = 0,117$ et $Y = 0,135$

- Pour $n = 10\,000$ on obtient :
  $X = 0{,}116\,1$ et $Y = 0,126$

- Pour $n = 100\,000$ on obtient :
  $X = 0{,}115\,64$ et $Y = 0{,}126\,26$

Variables : N, X, Y, I, A, B, C entiers
Entrées et initialisation
  Lire N
  $0 \to X$
  $0 \to Y$
Traitement
  pour I variant de 1 à N **faire**
    $\text{randInt}(1,6) \to A$
    $\text{randInt}(1,6) \to B$
    $\text{randInt}(1,6) \to C$
    si $A + B + C = 9$ **alors**
      $X + 1 \to X$
    fin
    si $A + B + C = 10$ **alors**
      $Y + 1 \to Y$
    fin
  fin
Sorties : Afficher $\dfrac{X}{N}, \dfrac{Y}{N}$

4 Élucidation

Le paradoxe vient du fait que les possibilités dénombrées par le Grand Duc ne sont pas équiprobables : une somme comme 3 + 3 + 3 a trois fois moins de chance d'être obtenue qu'une somme comme 5 + 2 + 2 , et six fois mois qu'une somme comme 4 + 3 + 2 . Plusieurs démarches permettent de calculer les probabilités d'obtenir une somme égale à 9 ou à 10 (cf. annexe) : on trouve respectivement $\dfrac{25}{216}$ et $\dfrac{27}{216}$, soit 0,116 (environ) et 0,125 .

5 Prolongements

L'étude de ce paradoxe permet de se sensibiliser au problème du choix d'un univers sur lequel l'hypothèse d'équiprobabilité des issues puisse être admise ou non. Cette question est loin d'être évidente et sa résolution a d'ailleurs rencontré historiquement de sérieux atermoiements comme l'atteste l'article "*croix ou pile*", pourtant beaucoup plus tardif, de d'Alembert dans l'Encyclopédie (publiée entre 1751 et 1772).

Annexe : analyse à l'aide d'un arbre de l'obtention de la somme 9

Deux points de vue sont possibles qui conduisent à préciser ou modifier l'épreuve initiale :
- on considère que les 3 dés sont distinguables : les issues sont les 216 triplets d'entiers compris entre 1 et 6 et l'arbre de dénombrement ci-dessous donne les 25 "*cas favorables*" (voir ci-après) . . .
- on se ramène au cas de trois lancers successifs et indépendants : en portant la probabilité 1/6 sur toutes les flèches, l'arbre ci-dessous devient un arbre de probabilités . . .

Les 25 cas favorables pour obtenir une somme de 9