Correction contrôle de mathématiques

Du samedi 04 avril 2015

EXERCICE 1

Suite arithmétique **(5 points)**

1) a) $u_0 = 1^2 - 0^2 = 1 \quad , \quad u_1 = 2^2 - 1^2 = 3 \quad , \quad u_2 = 3^2 - 2^2 = 5$

b) $$u_{n+1} - u_n = (n+2)^2 - (n-1)^2 - \left[(n+1)^2 - n^2\right] = (n+1)^2 - 2(n+1)^2 + n^2$$
$$= n^2 + 4n + 4 - 2(n^2 + 2n + 1) + n^2 = n^2 + 4n + 4 - 2n^2 - 4n - 2 + n^2 = 2$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 2$, la suite (u_n) est arithmétique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 1$.
On a alors $u_{99} = u_0 + 99\,r = 1 + 99 \times 2 = 199$

c) $$S = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 195 + 197 + 199 = u_0 + u_1 + \ldots u_{99}$$
$$= \text{Nbre de termes} \times \frac{u_0 + u_{99}}{2} = 100 \times \frac{1 + 199}{2} = 100^2 = 10\,000$$

2) a) $u_4 = u_2 + 2r \quad \Leftrightarrow \quad 2r = u_4 - u_2 \quad \Leftrightarrow \quad r = \dfrac{u_4 - u_2}{2} = \dfrac{-6 - 4}{2} = -5$

$u_2 = u_0 + 2r \quad \Leftrightarrow \quad u_0 = u_2 - 2r = 4 + 10 = 14$

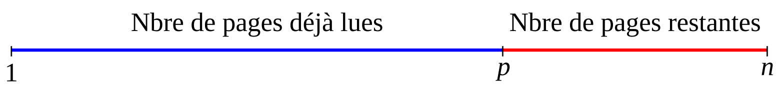
b) $u_n = u_0 + n\,r = 14 - 5n$. Donc $u_{100} = 14 - 5 \times 100 = 14 - 500 = -486$

Lorsque que n devient "*très grand*", $-5n$ devient "*très grand négatif*". On peut donc conjecturer que la suite diverge vers $-\infty$

EXERCICE 2

Nombre de pages d'un livre **(3 points)**

On peut faire le schéma suivant :



On appelle : p le nombre de pages déjà lues et n le nombre total de pages.

1) On sait que la somme des pages déjà lues vaut 351 donc :

$$1 + 2 + \cdots + p = 351 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{p(p+1)}{2} = 351 \quad \Leftrightarrow \quad p^2 + p - 702 = 0$$

$\Delta = 1 + 2808 = 2809 = 53^2$, la solution positive est donc $p = \dfrac{-1 + 53}{2} = 26$

Jean a déjà lu 26 pages, il en est donc à la page 27.

2) La somme des pages qui lui restent à lire vaut 469. Si on additionne alors toutes les pages, on a alors :

$$1+2+\cdots+p+(p+1)+\cdots+n = 351+469 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{n(n+1)}{2} = 820 \quad \Leftrightarrow \quad n^2+n-1640 = 0$$

$\Delta = 1 + 6560 = 6561 = 81^2$, la solution positive est donc $n = \dfrac{-1+81}{2} = 40$

Ce livre a donc 40 pages !

Exercice 3

Suite géométrique **(4 points)**

1) $u_4 = q^2\, u_2 \quad \Leftrightarrow \quad q^2 = \dfrac{u_4}{u_2} = \dfrac{405}{45} = 9 \quad \Leftrightarrow \quad q = \pm 3$

Les raisons possibles pour la suite (u_n) sont donc -3 et 3.

2) a) $u_2 = q^2\, u_0 \quad \Leftrightarrow \quad u_0 = \dfrac{u_2}{q^2} = \dfrac{45}{9} = 5$

b) Comme la suite (u_n) est croissante, $q > 1$ donc la raison de la suite (u_n) est donc 3

$u_n = q^n\, u_0 = 5 \times 3^n$. On a alors : $u_7 = 5 \times 3^7 = 10\,935$

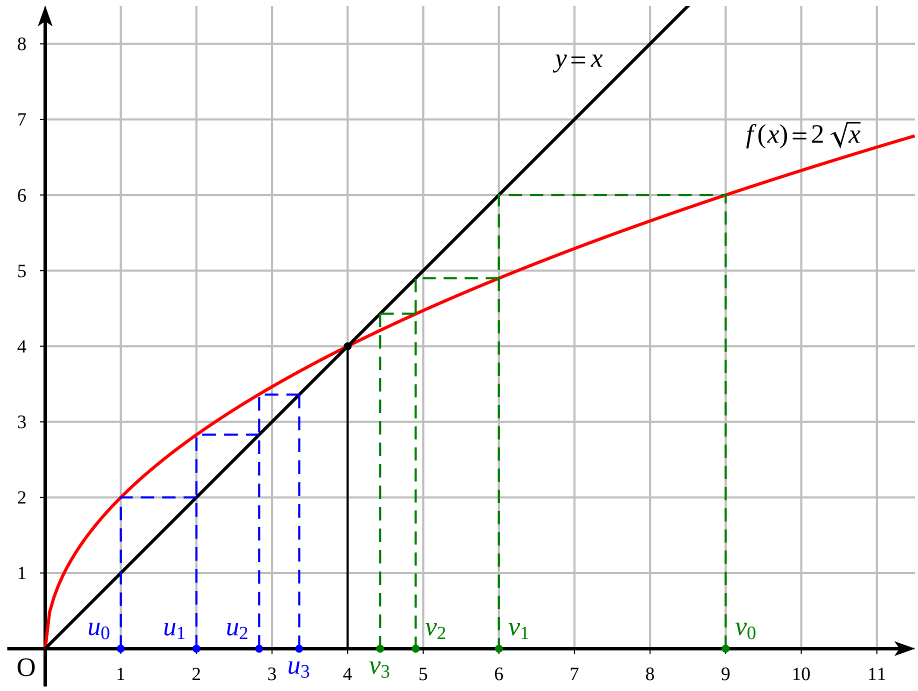
c) $S = 5 + 15 + 45 + 135 + \cdots + 10\,935 = u_0 + u_1 + \ldots u_7$

$$= u_0 \times \frac{1 - q^{\text{Nbre de termes}}}{1-q} = 5 \times \frac{1-3^8}{1-3} = \frac{5}{2}(3^8 - 1) = 16\,400$$

Exercice 4

Visualisation d'une suite **(3 points)**

1) a) On obtient les termes suivants :



b) On peut conjecturer que la suite (u_n) est croissante et semble converger vers 4

2) a) Voir graphique

b) On peut conjecturer que la suite (v_n) est décroissante et semble converger vers 4. Suivant le premier terme la suite peut donc être croissante ou décroissante !

Exercice 5

Algorithme **(2 points)**

1) Cet algorithme calcule la somme S des carrés : $S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$

2) On obtient le tableau suivant :

N	2	5	10	20	50
S	5	55	385	2 870	42 925

Exercice 6

Suite arithmético-géométrique **(5 points)**

1) $u_1 = -\dfrac{2}{3} \times 5 + 5 = \dfrac{-10+15}{3} = \dfrac{5}{3}$, $u_2 = -\dfrac{2}{3} \times \dfrac{5}{3} + 5 = \dfrac{-10+45}{9} = \dfrac{35}{9}$

$u_3 = -\dfrac{2}{3} \times \dfrac{35}{9} + 5 = \dfrac{-70+135}{27} = \dfrac{65}{27}$

2) $v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = -\dfrac{2}{3}u_n + 5 - 3 = -\dfrac{2}{3}u_n + 2 = -\dfrac{2}{3}\left(u_n + \dfrac{2}{-\dfrac{2}{3}}\right) = -\dfrac{2}{3}(u_n - 3) = -\dfrac{2}{3}v_n$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = -\dfrac{2}{3}$, la suite (v_n) est géométrique de raison $q = -\dfrac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 3 = 2$

3) $v_n = q^n v_0 = 2\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n \Rightarrow u_n = v_n + 3 = 2\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n + 3$

4) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$ car $-1 < -\dfrac{2}{3} < 1$. Par somme et produit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$

5) $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_0 \times \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} = 2 \times \dfrac{1-\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}}{1+\dfrac{2}{3}} = \dfrac{6}{5}\left[1 - \left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}\right]$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n+1} = 0$ par somme et produit $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{6}{5}$

$$\begin{aligned} T_n &= u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (v_0+3) + (v_1+3) + \cdots + (v_n+3) \\ &= (v_0 + v_1 + \cdots + v_n) + 3(n+1) = S_n + 3(n+1) \\ &= \frac{6}{5}\left[1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right] + 3(n+1) \end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n+1} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty$ par somme et produit :

$\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = +\infty$. La suite (T_n) diverge vers $+\infty$.