Correction du devoir de mathématiques

Du samedi 07 mars 2015

EXERCICE 13

Tuyaux **(4 points)**

L'empilage des tuyaux correspond à un nombre triangulaire T_n : somme des entiers naturel jusqu'à n

1) Empilage de 5 couches : $T_5 = \dfrac{5 \times 6}{2} = 15$ tuyaux

   Empilage de 12 couches : $T_{12} = \dfrac{12 \times 13}{2} = 78$ tuyaux

2) Il faut résoudre $T_n = 153$

   $$T_n = 153 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{n(n+1)}{2} = 153 \quad \Leftrightarrow \quad n^2 + n - 306 = 0$$

   $\Delta = 1 + 1224 = 1225 = 35^2$ la racine positive est $n = \dfrac{-1+35}{2} = 17$

   17 couches représente un empilage de 153 tuyaux.

3) Il faut résoudre $T_n \leqslant 200$

   $$T_n \leqslant 200 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{n(n+1)}{2} \leqslant 200 \quad \Leftrightarrow \quad n^2 + n - 400 \leqslant 0$$

   $\Delta = 1 + 1600 = 1601$ la racine positive est $n_1 = \dfrac{-1+\sqrt{1601}}{2} \simeq 19,5$

   Pour ranger 200 tuyaux, il y a un empilage de 19 couches.

   Il reste $200 - \dfrac{19 \times 20}{2} = 10$ tuyaux

EXERCICE 14

Nombre pyramidaux **(5 points)**

Le nombre u_i de cases sur la ligne i correspond à un terme d'une suite arithmétique de raison 2 (on ajoute deux cases à chaque couche) et de 1^er^ terme $u_1 = 1$.
On a alors $u_i = 1 + 2(i-1) = 2i - 1$

Le nombre S_i de cases de la ligne 1 à la ligne i correspond à la somme des nombres impairs de 1 à $(2i-1)$

$$S_i = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2i-1) = i \times \frac{1 + (2i-1)}{2} = i^2$$

Pour trouver la ligne où se trouve 2 013.

- Le nombre de ligne entièrement remplies : partie entière de $\sqrt{2013} = 44$
- Le nombre 2 013 se trouve sur la 45^e^ ligne et au rang $2013 - 44^2 = 77$

Le nombre 2013 se trouve sur la 45^e^ ligne au rang 77

EXERCICE 15

Forage **(6 points)**

1) On pose comme variable :
   - N le nombre de mètres forés,
   - U le coût du N^{e} mètre
   - et S la somme nécessaire pour forer N mètres.

   On trouve alors $N = 126$

   On peut forer 126 m avec 519 750 €

```
Variables : N, U, S entiers
Entrées et initialisation
    1 → N
    1000 → U
    1000 → S
Traitement
    tant que S < 519 750 faire
        N + 1 → N
        U + 50 → U
        S + U → S
    fin
Sorties : Afficher N
```

2) a) La suite (u_n) est une suite arithmétique car on obtient le terme suivant en ajoutant 50 au précédent. (u_n) est une suite arithmétique de raison 50 et de premier terme $u_1 = 1000$

   b) On pose S_n la somme nécessaire pour forer N mètre :
   $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

   $u_n = 1000 + 50(n-1)$ et $S_n = 519\,750$

   $$S_n = 519\,750 \quad\Leftrightarrow\quad n \times \frac{u_1 + u_n}{2} = 519\,750 \quad\Leftrightarrow$$
   $$n[1000 + (1000 + 50(n-1)] = 1\,039\,500 \quad\Leftrightarrow\quad 2000n + 50n(n-1) - 1\,039\,500 = 0$$
   $$\Leftrightarrow\quad 50n^2 + 1950n - 1\,039\,500 = 0$$

   En divisant par 50 : $n^2 + 39n - 20\,790 = 0$

   c) $\Delta = 39^2 - 83\,160 = 84\,681 = 291^2$

   On prend la racine positive $n = \dfrac{-39 + 291}{2} = 126$

   On retrouve ainsi le résultat trouver avec un algorithme.

EXERCICE 18

Algorithme **(5 points)**

a) La suite (u_n) est arithmétique car on ajoute 3 au terme précédent pour trouver le suivant $(U + 3 \to U)$ et de premier terme $u_0 = 1$

b) Le but de cet algorithme est de calculer la somme $S = u_1 + u_2 + \cdots + u_{10}$.
⚠ on somme les termes à partir de u_1 car la somme S est initialisée à 0.

On obtient par cet algorithme $S = 175$

c) $S = u_1 + u_2 + \cdots + u_{10} = 10 \times \dfrac{u_1 + u_{10}}{2}$

On a : $u_1 = 1 + 3 = 4$ et $u_{10} = 1 + 10 \times 3 = 31$

D'où $S = 10 \times \dfrac{4 + 31}{2} = 175$