Contrôle de mathématiques

Du mardi 24 novembre 2015

Exercice 1

Ensemble de définition **(4 points)**

1) $2x-1 \neq 0$ et $2x+3 \neq 0 \iff x \neq \dfrac{1}{2}$ et $x \neq -\dfrac{3}{2} \iff D_f = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{3}{2} ; \dfrac{1}{2}\right\}$

2) $3-2x \geqslant 0 \iff -2x \geqslant -3 \iff x \leqslant \dfrac{3}{2} \iff D_f = \left]-\infty ; \dfrac{3}{2}\right]$

3) $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 0 \iff x^2+1 \geqslant 1 (\neq 0) \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$

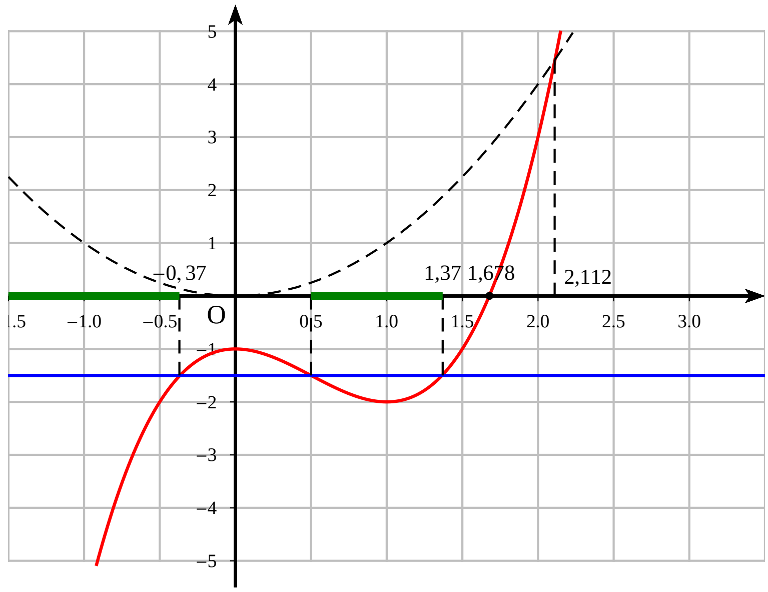
4) $x+2>0 \iff x>-2 \iff D_f =]-2 ; +\infty[$

5) $1-x^2 \geqslant 0 \iff (1-x)(1+x) \geqslant 0$,
on prend à l'intérieur des racines -1 et $1 \Rightarrow D_f = [-1;1]$

Exercice 2

Résolution graphique **(6 points)**

1) On obtient la courbe suivante :



2) a) On obtient le tableau de variation suivant :

x	-1		0		1		3
$f(x)$	-6	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	26

b) L'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution car la courbe $\mathscr{C}_f$ ne coupe qu'une seule fois l'axe des abscisses.

À l'aide de la touche calcul, on obtient $\alpha \approx 1,678$.

c) On trace la droite horizontale $y = -1,5$.
On cherche les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ qui sont au dessous ou sur la droite d'équation $y = -1,5$.

On trouve $]-\infty\,;-0,37] \cup [0,50\,;\ 1,37]$

d) On trace la parabole d'équation $y = x^2$. On cherche les abscisses des points d'intersection entre $\mathscr{C}_f$ et la parabole. On trouve une solution $\beta = 2,112$

Exercice 3

Valeur absolue **(4 points)**

1) a) $2|x| - 1 = 7 \Leftrightarrow 2|x| = 8 \Leftrightarrow |x| = 4 \Leftrightarrow x = -4$ ou $x = 4$

$$S = \{-4\,;\ 4\}$$

b) $|3 - 2x| = |x + 4| \Leftrightarrow$

- $3 - 2x = x + 4 \Leftrightarrow -3x = 1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{3}$ **ou**
- $3 - 2x = -x - 4 \Leftrightarrow -x = -7 \Leftrightarrow x = 7$

$$S = \left\{-\frac{1}{3}\,;\ 7\right\}$$

c) $|3x + 1| \leqslant 5 \Leftrightarrow -5 \leqslant 3x + 1 \leqslant 5 \Leftrightarrow -6 \leqslant 4x \leqslant 4 \Leftrightarrow -2 \leqslant x \leqslant \dfrac{4}{3}$

$$S = \left[-2\,;\ \frac{4}{3}\right]$$

d) $|1 - 5x| > 4 \Leftrightarrow$

- $1 - 5x > 4 \Leftrightarrow -5x > 3 \Leftrightarrow x < -\dfrac{3}{5}$ **ou**
- $-1 + 5x > 4 \Leftrightarrow 5x > 5 \Leftrightarrow x > 1$

$$S = \left]-\infty\,;-\frac{3}{5}\right[\cup \,]1\,;+\infty[$$

2) La fonction f est du type $|ax + b|$

$$\begin{cases} f(3) = 0 \\ f(4) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + b = 0 \\ 4a + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -6 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = |2x - 6|$$

La fonction g est du type $g(x) = -|ax + b|$ (symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

$$\begin{cases} g(-2) = 0 \\ f(0) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -(-2a + b) = 0 \\ -(b) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = -|x + 2|$$

EXERCICE 4

Variation des fonctions carrées et homographiques **(2 points)**

1) $f(x) = x^2 + 4x + 7 = (x+2)^2 - 4 + 7 = (x+2)^2 + 3$, on obtient le tableau de variation :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

2) $g(x) = 5 - \dfrac{2}{x+1}$ de la forme $\dfrac{a}{x-\alpha} + \beta$ avec $a = -2$, $\alpha = -1$ et $\beta = 5$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$	5	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	5

EXERCICE 5

Variation des fonctions associées **(4 points)**

1) $f(x) = \sqrt{3-2x}$ sur $I = \left]-\infty\,;\dfrac{3}{2}\right[$

On pose $u(x) = 3 - 2x$ donc $f = \sqrt{u}$

- u est une fonction affine décroissante car $a = -2$.
- Si $x \in I$ alors $3 - 2x \geqslant 0$ donc $\sqrt{u}$ existe.
- u et $\sqrt{u}$ ont même variation, donc f est décroissante sur I

2) $f(x) = -3\sqrt{x} + \dfrac{1}{x}$ f est de la forme $f = \lambda u + v$

avec $\lambda = -3$, $u(x) = \sqrt{x}$ et $v(x) = \dfrac{1}{x}$

- La fonction racine carrée est croissante sur I.
- $\lambda < 0$ donc u et λu sont des variations contraires et donc λu est décroissante sur I
- La fonction inverse est décroissante sur I.
- Par somme de deux fonctions décroissantes, f est décroissante sur I

3) $f = \dfrac{\lambda}{u}$

avec $\lambda = -2$, $u(x) = (x+1)^2 + 2$

La fonction u a pour tableau de variation ci-contre :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$u(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

- La fonction u est décroissante sur I et croissante sur J.
- $u > 0$ donc $\dfrac{1}{u}$ existe. Comme u et $\dfrac{1}{u}$ ont des variations contraires, $\dfrac{1}{u}$ est croissante sur I et décroissante sur J.
- $\lambda < 0$, donc $\dfrac{1}{u}$ et $\dfrac{\lambda}{u}$ ont des variations contraires. La fonction f est donc décroissante sur I et croissante sur I