Devoir à rendre du lundi 7 mars 2016

EXERCICE 1

Monotonie d'une suite **(1,5 points)**

1) $$u_{n+1} - u_n = \frac{2(n+1)+5}{(n+1)+1} - \frac{2n+5}{n+1} = \frac{2n+7}{n+2} - \frac{2n+5}{n+1}$$
$$= \frac{(2n+7)(n+1) - (2n+5)(n+1)}{(n+2)(n+1)}$$
$$= \frac{2n^2 + 2n + 7n + 7 - 2n^2 - 4n - 5n - 10}{(n+2)(n+1)}$$
$$= \frac{-3}{(n+2)(n+1)}$$

2) $\forall n \in \mathbb{N},\ (n+2)(n+1) > 0$ donc $u_n < 0$.
La suite (u_n) est décroissante.

EXERCICE 2

Conjecture **(4,5 points)**

1) On obtient les termes suivants :

n	0	1	2	3
u_n	0	-8	-28	-54

On peut conjecturer que la suite est décroissante car $u_0 > u_1 > u_2 > u_3$.

2) a) $f'(x) = 3x^2 - 18x = 3x(x-6)$.

- $f'(x) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 6$
- Le signe de $f'(x)$ est le signe du trinôme.

b) On obtient le tableau de variation suivant :

x	0		6		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	-108	↗	

c) La suite est croissante à partir de $n \geqslant 6$, car $\forall x \geqslant 6,\ f'(x) \geqslant 0$. Le caractère continue entraîne le caractère discret (la réciproque est fausse).

3) La conjecture initiale était fausse ce qui prouve que quelques exemples ne démontre rien.

EXERCICE 3

Suite arithmétique **(4 points)**

Les questions suivantes sont indépendantes.
On considère une suite arithmétique (u_n) de raison r définie sur $\mathbb{N}$.
On pose $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

1) $u_{39} = u_7 + (39-7)r = u_7 + 32r \quad \Leftrightarrow \quad r = \dfrac{u_{39} - u_7}{32} = \dfrac{15-111}{32} = -3$

$u_7 = u_0 + 7r \quad \Leftrightarrow \quad u_0 = u_7 - 7r = 111 + 7 \times 3 = 132$

$u_{68} = u_0 + 68r = 132 - 3 \times 68 = -72$

2) $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n+1)\left(\dfrac{u_0 + u_n}{2}\right).$

$u_n = u_0 + nr \quad \Leftrightarrow \quad u_0 = u_n - nr = 10 - 2n$

En remplaçant dans l'expression de S_n, on a :

$S_n = -26 \quad \Leftrightarrow \quad (n+1)\left(\dfrac{10-2n+10}{2}\right) = -26 \quad \Leftrightarrow \quad (n+1)(10-n) = -26 \quad \Leftrightarrow$

$(n+1)(n-10) = 26 \quad \Leftrightarrow \quad n^2 - 10n + n - 10 - 26 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad n^2 - 9n - 36 = 0$

$\Delta = 81 + 144 = 225 = 15^2$, la racine positive est : $n = \dfrac{9+15}{2} = 12$

$u_{12} = u_0 + 12r \quad \Leftrightarrow \quad u_0 = u_{12} - 12r = 10 - 24 = -14$

EXERCICE 4

Suite géométrique **(3 points)**

1) $u_5 = u_3 q^2 \quad \Leftrightarrow \quad q^2 = \dfrac{32}{162} = \dfrac{16}{81}$

Comme $q > 0$, on a : $q = \sqrt{\dfrac{16}{81}} = \dfrac{4}{9}$

$u_3 = u_0 q^3 \quad \Leftrightarrow \quad u_0 = \dfrac{u_3}{q^3} = \dfrac{162}{\left(\dfrac{4}{9}\right)^3} = 162 \times \dfrac{9^3}{4^3} = \dfrac{59\,049}{32}$

2) $u_{10} = u_6 q^4 \quad \Leftrightarrow \quad q^4 = \dfrac{u_{10}}{u_6} = \dfrac{5103}{63} = 81 = 3^4$

Comme $q > 0$, on a : $q = 3$

$u_6 = u_0 q^6 \quad \Leftrightarrow \quad u_0 = \dfrac{u_6}{q^6} = \dfrac{63}{3^6} = \dfrac{7}{81}$

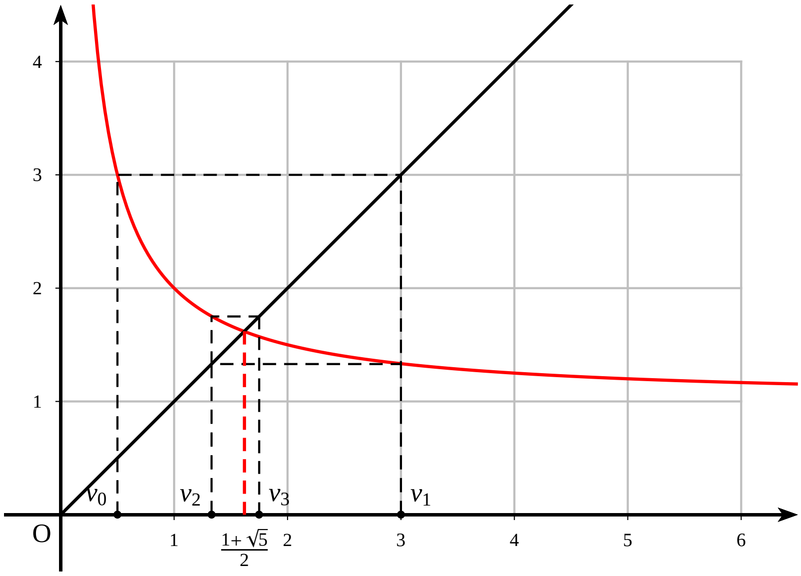
$u_{13} = u_{10} q^3 = 5\,103 \times 3^3 = 137\,781$

EXERCICE 5

Visualisation d'une suite **(2 point)**

1) $f(x) = \dfrac{1}{x} + 1 = \dfrac{1+x}{x}$

2) On obtient le graphe ci-dessous.



3) La suite v_n semble converger vers le point d'intersection de la droite d'équation $y = x$ et la courbe de la fonction f. On a alors :

$$x = \frac{x+1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x - 1 = 0$$

$\Delta = 1 + 4 = 5$, la racine positive est alors $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

La suite semble donc converger vers $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (nombre d'or)

EXERCICE 6

Filtre lumineux **(5 points)**

1) $i_1 = i_0 - 0,23 i_0 = 0,77 i_0 =$

2) a) $i_{n+1} = i_n - 0,23 i_n = 0,77 i_n$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{i_{n+1}}{i_n} = 0,77$, la suite (i_n) est géométrique de raison $q = 0,77$ et de 1er terme i_0.

b) $i_n = i_0\, q^n = 0,77^n\, i_0$

3) $i_4 = i_0\, q^4 \quad \Leftrightarrow \quad i_0 = \dfrac{i_4}{q^4} = \dfrac{15}{0,77^4} \approx 42,67$ candelas

4) a) On obtient l'algorithme ci-contre.

Comme cela ne dépend pas de l'intensité initiale, on peut par exemple initialiser I à 1.

b) On obtient alors : $n = 9$

vérification : $077^9 \approx 0,095$

Variables : N entier et I réels
Entrées et initialisation
$0 \rightarrow N$
$1 \rightarrow I$
Traitement
tant que $I > 0,1$ **faire**
$N + 1 \rightarrow N$
$0,77 \times I \rightarrow I$
fin
Sorties : Afficher I