Correction contrôle de mathématiques

Du mercredi 31 mai 2017

EXERCICE 1

Tireurs à l'arc **(3 points)**

1) $\mathrm{E}(X) = \sum p_i x_i = 0,16 \times 1 + 0,15 \times 2 + \cdots + 0,06 \times 10 = 3,56$

$\mathrm{V}(X) = \sum p_i x_i^2 - \mathrm{E}^2(X) = 0,16 \times 1^2 + 0,15 \times 2^2 + \cdots + 0,06 \times 10^2 - 3,56^2 = 4,3864$

On en déduit : $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{V}(X)} \approx 2,09$

$\mathrm{E}(Y) = \sum p_i y_i = 0,03 \times 1 + 0,1 \times 2 + \cdots + 0,04 \times 10 = 3,55$

$\mathrm{V}(Y) = \sum p_i y_i^2 - \mathrm{E}^2(Y) = 0,03 \times 1^2 + 0,1 \times 2^2 + \cdots + 0,04 \times 10^2 - 3,55^2 = 2,5275$

On en déduit : $\sigma(Y) = \sqrt{\mathrm{V}(Y)} \approx 1,59$

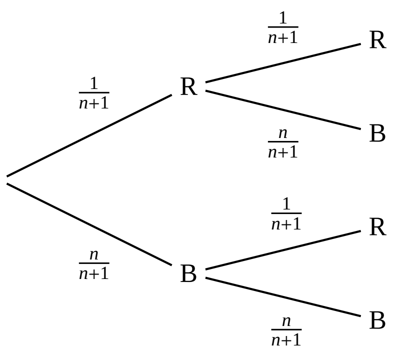
2) Les tireurs ont quasiment fait la même moyenne $\mathrm{E}(X) \approx \mathrm{E}(Y)$, le sélectionneur prendra alors le tireur le plus constant (risque minimum) soit le tireur B car $\sigma(Y) < \sigma(Y)$.

EXERCICE 2

Problème de boules et d'urne. **(6 points)**

1) Comme le tirage se fait avec remise, on peut considérer que les 2 tirages sont identiques et indépendants. La probabilité de tirer une boule rouge est de $\frac{1}{n+1}$ et de tirer une boule blanche $\frac{n}{n+1}$.

On peut faire l'arbre suivant :



$$p(\mathrm{M}) = p(\mathrm{RR}) + p(\mathrm{BB}) = \frac{1}{n+1} \times \frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1} \times \frac{n}{n+1} = \frac{n^2+1}{(n+1)^2}$$

$$p(\mathrm{N}) = p(\mathrm{RB}) + p(\mathrm{BR}) = \frac{1}{n+1} \times \frac{n}{n+1} + \frac{n}{n+1} \times \frac{1}{n+1} = \frac{2n}{(n+1)^2}$$

2) a) X peut prendre les valeurs : $-(n+1)^2$ et $2(n+1)^2$

x_i	$-(n+1)^2$	$2(n+1)^2$
$p(X = x_i)$	$\dfrac{n^2+1}{(n+1)^2}$	$\dfrac{2n}{(n+1)^2}$

b) $\mathrm{E}(X) = \sum p_i x_i = -\dfrac{n^2+1}{(n+1)^2} \times (n+1)^2 + \dfrac{2n}{(n+1)^2} \times 2(n+1)^2 = -n^2 - 1 + 4n$

c) Le jeu est favorable au joueur si $E(X) > 0$.

Racine de $-x^2 + 4x - 1$, on a $\Delta = 16 - 4 = 12 = (2\sqrt{3})^2$

On obtient : $x_1 = \dfrac{-4 + 2\sqrt{3}}{-2} = 2 - \sqrt{3}$ et $x_2 = \dfrac{-4 - 2\sqrt{3}}{-2} = 2 + \sqrt{3}$.

Le trinôme est positif à l'intérieur des racines ($a < 0$), on doit prendre n entre $2 - \sqrt{3} \approx 0,3$ et $2 + \sqrt{3} \approx 3,7$. Les valeurs possibles pour n sont donc 1, 2 ou 3.

d) Le joueur a intérêt à avoir la plus grande espérance.

$-n^2 + 4n - 1 = -(n^2 - 4n + 1) = -[(n-2)^2 - 4 + 1] = -(n-2)^2 + 3$

L'espérance est donc maximale pour $n = 2$, l'espérance est alors de 3 €.

Exercice 3

Bénéfice et coût de fabrication **(6 points)**

1) On peut construire le tableau double entrée suivant car on nous donne l'intersection des événements A et B. En raisonnant sur 100 objets :

	A	$\overline{A}$	Total
B	4	5	9
$\overline{B}$	1	90	91
Total	5	95	100

X prend les valeurs :

- 950 obtenu avec $\overline{A} \cap \overline{B}$;
- 1050 (950 + 100) obtenu avec $A \cap \overline{B}$;
- 1100 (950 + 150) obtenu avec $\overline{A} \cap B$;
- 1200 (950 + 250) obtenu avec $A \cap B$.

x_i	950	1050	1100	1200
$p(X = x_i)$	0,9	0,01	0,05	0,04

2) $E(X) = \sum p_i x_i = 0,9 \times 950 + 0,01 \times 1050 + \cdots + 0,04 \times 1200 = 968,50$.

$E(X)$ représente le coût moyen d'un objet en tenant compte des défauts éventuels.

3) a) $E(X) > 960$, l'usine ne fait pas de bénéfice (8,50 € de perte par objet).

b) Pour un bénéfice moyen de 100 € par objet, le prix de vente P doit être :
$P = E(X) + 100 = 1068,50$ €.

Exercice 4

Pile ou face **(3 points)**

1) Soit l'expérience : « on lance une pièce de monnaie ». On appelle succès « la pièce tombe sur "pile" » avec une probabilité $p = 0,4$. On appelle échec le cas contraire avec une probabilité $q = 1 - p = 0,5$.

On réitère 7 fois cette expérience de façon identique et indépendante. On appelle X le nombre de succès obtenus.

X suit donc la loi binomiale $\mathscr{B}(7; 0,5)$.

2) $p(X=3) = \binom{7}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\left(\dfrac{1}{2}\right)^4 = \binom{7}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^7 = \text{binomFdp}(7, 0.5, 3) \approx 0,273$

3) $p(X \geqslant 3) = 1 - p(X \leqslant 2) = 1 - \text{binomFRép}(7, 0.5, 2) \approx 0,773$

Exercice 5

Un professeur très âgé **(3 points)**

1) Soit l'expérience : « le vieux professeur interrage un élève ». On appelle succès « l'élève interrogé est une fille » avec une probabilité $p = \frac{2}{3}$. On appelle échec le cas contraire avec une probabilité $q = 1 - p = \frac{1}{3}$.
On réitère n fois cette expérience de façon identique (le vieux professeur ne se rappelle plus l'élève précédemment interrogé) et indépendante. On appelle X_n le nombre de succès obtenus.
X_n suit donc la loi binomiale $\mathscr{B}\left(n; \frac{2}{3}\right)$.

2) a) $p(X_{10} = 4) = \binom{10}{4}\left(\dfrac{2}{3}\right)^4\left(\dfrac{1}{3}\right)^6 = \text{binomFdp}\left(10, \dfrac{2}{3}, 4\right) \approx 0,056\,9$

b) $p(X_{10} \geqslant 4) = 1 - p(X_{10} \leqslant 3) = 1 - \text{binomFRép}\left(10, \frac{2}{3}, 3\right) \approx 0,980\,3$

c) $p(X_n = 0) < 0,001 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\dfrac{1}{3}\right)^n < 0,001$

Par tâtonnement, on trouve $\left(\dfrac{1}{3}\right)^6 \approx 0,001\,37$ et $\left(\dfrac{1}{3}\right)^7 \approx 0,000\,46$

Le nombre minimal de cours consécutifs doit donc être de 7.