Correction contrôle de mathématiques

du mercredi 30 mai 2018

Exercice 1

Menus **(5 points)**

1) On obtient le tableau suivant :

	D_1	D_2	Total
P_1	42	18	60
P_2	60	30	90
P_3	78	72	150
Total	180	120	300

2) a) $p(A) = \dfrac{150}{300} = 0.5.$

b) $p(B) = \dfrac{180}{300} = 0,6.$

c) $p(A \cap B) = \dfrac{78}{300} = 0,26.$

d) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0,5 + 0,6 - 0,26 = 0,84.$

e) $p(\overline{A} \cap \overline{B}) = p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(A \cup B) = 1 - 0,84 = 0,16.$

Exercice 2

Tirages **(5 points)**

1) Comme le tirage est avec remise, à chacun des deux tirages on a 15 choix possibles.

$15^2 = 225$ tirages composent l'univers.

2) Nombre de cas favorables : 6 choix à chaque tirages donc $6^2 = 36$ choix.

$$p(A) = \frac{\text{Nbre de cas favorables}}{\text{Nbre de cas possibles}} = \frac{36}{225} = \frac{4}{25}.$$

3) On peut tirer soit deux boules rouge, soit deux boules jaunes, soit deux boules vertes :

$$p(B) = \frac{5^2 + 4^2 + 6^2}{225} = \frac{25 + 16 + 36}{225} = \frac{77}{225}$$

4) $p(C) = p(\overline{B}) = 1 - \dfrac{77}{225} = \dfrac{148}{225}.$

5) a) X peut prendre les valeurs -3 ou 2. On obtient la loi de probabilité suivante :

x_i	-3	2
$p\,(X = x_i)$	$\dfrac{148}{225}$	$\dfrac{77}{225}$

b) $E(X) = \dfrac{148}{225}(-3) + \dfrac{77}{225}(2) = \dfrac{-444+154}{225} = -\dfrac{290}{225} = -\dfrac{58}{45} \approx -1,29.$

$V(X) = \dfrac{148}{225}(-3)^2 + \dfrac{77}{225}(2)^2 - \left(-\dfrac{58}{45}\right)^2 = \dfrac{1640}{225} - \left(-\dfrac{58}{45}\right)^2 \approx 5,62.$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \approx \sqrt{5,52} \approx 2,37.$

Exercice 3

Ascenseurs **(5 points)**

1) On tire au hasard un employé de l'immeuble.

On appelle succès, l'employé se rend au 2e niveau avec une probabilité $p = \dfrac{1}{3}$ et échec dans le cas contraire avec une probabilité $1 - p = \dfrac{2}{3}$.

On réitère 20 fois ce tirage de façon indépendante et identique ($\approx$ tirage avec remise).

On appelle X le nombre de succès obtenus.

Les conditions de la loi binomiale sont vérifiées donc X suit la loi $\mathscr{B}\left(20\,,\,\dfrac{1}{3}\right)$.

2) $p(X=5) = \dbinom{20}{5}\left(\dfrac{1}{3}\right)^5\left(\dfrac{2}{3}\right)^{15} = \text{binomFdp}\left(20\,,\,\dfrac{1}{3}\,,\,5\right) \approx 0,146.$

3) $p(X \geqslant 4) = 1 - p(X \leqslant 3) = 1 - \text{binomFRép}\left(20\,,\,\dfrac{1}{3}\,,\,3\right) \approx 0,940.$

4) $E(X) = np = \dfrac{20}{3} \approx 7.$

7 personnes en moyenne se rendent au 2e niveau.

5) $p(X \geqslant 1) = 1 - p(X=0) = 1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^{20} \approx 1,000.$

Il est donc raisonnable qu'être "quasi" sûr d'avoir au moins une personne se rendant au 2e niveau.

Exercice 4

Tournoi **(3 points)**

A et B joue une partie de tennis de table.
On appelle succès le joueur A gagne la partie avec une probabilité $p = 0,6$ et échec dans le cas contraire avec une probabilité $1 - p = 0,4$.

On réitère 9 fois cette expérience que l'on suppose identiques et indépendantes.

On appelle X, la variable aléatoire associée au nombre de parties gagnées par le joueur A.

X suit donc la loi binomiale $\mathscr{B}(9\,,\,0.6)$.

Le joueur B gagne le tournoi si et seulement si $X \leqslant 4$.

$p(X \leqslant 4) = \text{binomFRép}\,(9\,,\,0.6\,,\,4) \approx 0,267.$

La probabilité que le joueur B gagne le tournoi est de 0,267.

EXERCICE 5

Algorithme **(2 points)**

Soit X la variable aléatoire associée au nombre de six obtenus.

X suit alors la loi $\mathscr{B}\left(n\,,\,\dfrac{1}{6}\right)$.

$p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^n$.

On peut alors écrire l'algorithme suivant ;

Variables : N entier
Entrées et initialisation
  $0 \to N$
Traitement
  tant que $1 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^n \leqslant 0,999$ **faire**
    $N + 1 \to N$
  fin
Sorties : Afficher N

On trouve alors $n = 38$.