Correction contrôle de mathématiques

Du lundi 04 février 2019

EXERCICE 1

Monotonie d'une suite **(2 points)**

1) $u_{n+1} - u_n = 2(n+1)^2 - 3(n+1) - 4 - (2n^2 - 3n - 4)$
$= 2n^2 + 4n + 2 - 3n - 3 - 4 - 2n^2 + 3n + 4 = 4n - 1$

2) $\forall n \geqslant 1 \quad \Rightarrow \quad 4n - 1 \geqslant 3 > 0 \quad \Rightarrow \quad u_{n+1} - u_n > 0$. La suite (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}^*$.

EXERCICE 2

Suite arithmétique et suite géométrique **(5 points)**

1) a) $u_{34} = u_{11} + (34-11)r \quad \Rightarrow \quad r = \dfrac{u_{34} - u_{11}}{34 - 11} = \dfrac{250 - 89}{23} = 7.$

$u_{11} = u_0 + 11r \quad \Rightarrow \quad u_0 = u_{11} - 11r = 89 - 11 \times 7 = 12.$

b) $u_{90} = u_0 + 90r = 12 + 90 \times 7 = 642.$

2) S : somme des premiers termes d'une suite arithmétique de raison 2 et de 1er terme 4.

Nbre termes $= \dfrac{308 - 4}{2} + 1 = 153$

S = Nbre de termes $\times \dfrac{\sum \text{termes extr.}}{2} = 153 \times \dfrac{4 + 308}{2} = 23\,868.$

3) a) $v_4 = v_2 q^{4-2} \quad \Rightarrow \quad q^2 = \dfrac{v_4}{v_2} \dfrac{506,25}{250} = 2,25$. Or $q > 0$, d'où $q = \sqrt{2,25} = 1,5$.

$v_2 = v_0 q^2 \quad \Rightarrow \quad v_0 = \dfrac{v_2}{q^2} = \dfrac{225}{2,25} = 100.$

b) S' est la somme des 11 premiers termes d'une suite géométrique de raison $q = 1,5$ et de 1er terme $v_0 = 100$.

$$S' = v_0 \times \frac{1 - q^{11}}{1 - q} = 100 \times \frac{1 - 1,5^{11}}{1 - 1,5} = 200\left(1,5^{11} - 1\right) \approx 17\,100 \text{ à l'unité près.}$$

EXERCICE 3

Limite d'une suite : Vrai-Faux **(2 points)**

Affirmation 1 Vraie : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ car $-1 < -\dfrac{1}{2} < 1$ par produit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

La suite (u_n) converge vers 0.

Affirmation 2 Fausse : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\dfrac{4}{3}\right)^n = +\infty$ car $\dfrac{4}{3} > 1$ par produit $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$.

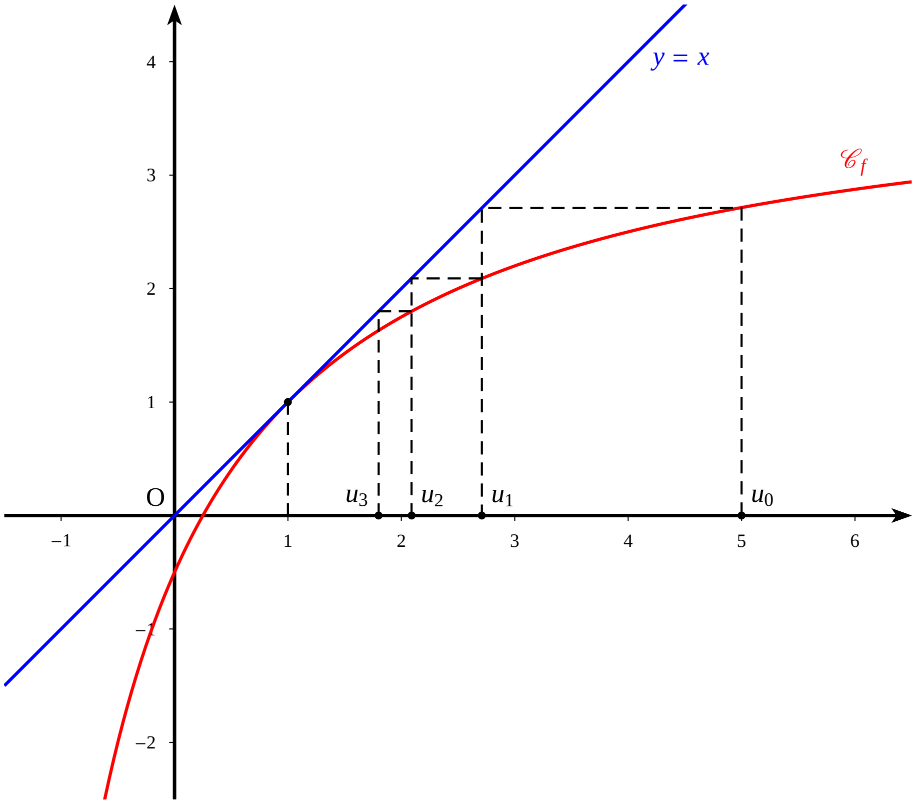
La suite (u_n) diverge vers $-\infty$.

Affirmation 3 Vraie : $[(-3)^n]$ n'admet pas de limite car $-3 \leqslant -1$.
(w_n) n'a pas de limite. La suite (w_n) diverge.

Exercice 4

Visualisation et conjecture **(5 points)**

1) a) On obtient le graphique suivant :



b) On peut conjecturer que la suite (u_n) est décroissante et converge vers 1.

2) a) $$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}-1} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{1}{\dfrac{4u_n-1}{u_n+2} - 1} - \frac{1}{u_n-1} = \frac{u_n+2}{4u_n - 1 - u_n - 2} - \frac{1}{u_n - 1}$$
$$= \frac{u_n+2}{3(u_n-1)} - \frac{1}{u_n-1} = \frac{u_n+2-3}{3(u_n-1)} = \frac{u_n-1}{3(u_n-1)} = \frac{1}{3}.$$

$\forall n \in \mathbb{N},\quad v_{n-1} - v_n = \dfrac{1}{3}$.

La suite (v_n) est arithmétique de raison $r = \dfrac{1}{3}$ et de 1^er^ terme $v_0 = \dfrac{1}{5-1} = \dfrac{1}{4}$.

Comme $r > 0$, la suite (v_n) est croissante et donc $(v_n - 1)$ aussi, par inverse, la suite (u_n) est décroissante.

b) $v_n = v_0 + nr = \dfrac{1}{4} + \dfrac{n}{3}$. Pour u_n : $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1} \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{1}{v_n} = u_n - 1 \quad\Leftrightarrow\quad u_n = \dfrac{1}{v_n} + 1$.

$$u_n = \frac{1}{\dfrac{1}{4} + \dfrac{n}{3}} + 1 = \frac{12}{3+4n} + 1 = \frac{12+3+4n}{4n+3} = \frac{4n+15}{4n+3}.$$

c) On divise numérateur et dénonminateur par $n \neq 0$, $u_n = \dfrac{4n+15}{4n+3} \overset{\div n}{=} \dfrac{4+\dfrac{15}{n}}{4+\dfrac{3}{n}}$.

On a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{15}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n} = 0$, par quotient $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{4}{4} = 1$.

Exercice 5

Placement **(6 points)**

1) Entre l'année n et l'année $(n+1)$, le capital augmente de 6 % pour les intérêt diminué de la part des impôts soit de 9 milliers d'€. On a donc :

$$C_{n+1} = C_n + \frac{6}{100}C_n - 9 = 1,06C_n - 9$$

.

2) Calculons les trois premiers termes de la suite : $C_0 = 200$, $C_1 = 203$, $C_2 = 206,18$.

$C_1 - C_0 = 3$ et $C_2 - C_1 = 3,18$ donc $C_1 - C_0 \neq C_2 - C_1$.
La suite (C_n) n'est pas arithmétique.

$\dfrac{C_1}{C_0} = \dfrac{203}{200}$ et $\dfrac{C_2}{C_1} = \dfrac{206,18}{203} = \dfrac{10\,309}{10\,150}$. donc $\dfrac{C_1}{C_0} \neq \dfrac{C_2}{C_1}$.

La suite (C_n) n'est pas géométrique.

3) a) On obtient l'algorithme complété suivant :

Variables : N entier et C réel
Entrées et initialisation
  $0 \to N$
  $200 \to C$
Traitement
  tant que $C < 280$ **faire**
    $N+1 \to N$
    $1,06C - 9 \to C$
  fin
Sorties : Afficher N

b) On trouve alors $n = 17$

Alice pourra acheter sa maison au bout de 17 ans

4) a) $u_{n+1} = C_{n+1} - 150 = 1,06C_n - 9 - 150 = 1,06C_n - 159$

$$= 1,06\left(C_n - \frac{159}{1,06}\right) = 1,06\,(C_n - 150) = 1,06u_n.$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1,06$, la suite (u_n) est géométrique de raison $q = 1,06$ et de premier terme $u_0 = 200 - 150 = 50$.

b) $u_n = u_0 q^n = 50 \times 1,06^n$ d'où $C_n = u_n + 150 = 50 \times 1,06^n + 150$.

c) $C_5 = 50 \times 1,06^5 + 150 \approx 216,911\,28$.

Dans cinq ans Alice disposera de $216\,911,28$ €.