Correction contrôle de mathématiques

Du jeudi 17 octobre 2019

EXERCICE 1

Fonction trinôme **(5 points)**

1) a) $f(x) = 3x^2-12x+19 = 3\left(x^2 - 4x + \dfrac{19}{3}\right) = 3\left[(x-2)^2 - 4 + \dfrac{19}{3}\right] = 3\left[(x-2)^2 + \dfrac{7}{3}\right]$
$= 3(x-2)^2 + 7$

b) On obtient le tableau de variation suivant avec : $a = 3 > 0$, $\alpha = 2$ et $\beta = 7$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$	7	$\nearrow$ $+\infty$

c) Au vu de ce tableau : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 7$. La fonction f ne s'annule pas et donc sa représentation ne coupe pas l'axe des abscisses.

2) a) $\Delta = 49 + 120 = 169 = 13^2$. $\Delta > 0$, la fonction g admet deux racines.

$$x_1 = \frac{7+13}{-4} = -5 \quad \text{ou} \quad x_2 = \frac{7-13}{-4} = \frac{3}{2}$$
.

b) $g(x) = -2(x+5)\left(x - \dfrac{3}{2}\right) = (x+5)(-2x+3)$.

c) $g(x) = -70 \quad \Leftrightarrow \quad -2x^2 - 7x + 15 = -70 \quad \Leftrightarrow \quad -2x^2 - 7x + 85 = 0$

$\Delta = 49 + 680 = 729 = 27^2$. $\Delta > 0$, deux racines.

$$x_1 = \frac{7+27}{-4} = -\frac{17}{2} \quad \text{ou} \quad x_2 = \frac{7-27}{-4} = 5 \ \text{ donc } \ S = \left\{-\frac{17}{2}\ ;\ 5\right\}$$
.

d) $g(x) = 25 \quad \Leftrightarrow \quad -2x^2-7x+15 = 25 \quad \Leftrightarrow \quad -2x^2-7x-10 = 0 \quad \overset{\times(-1)}{\Leftrightarrow} \quad 2x^2+7x+10 = 0$.

$\Delta = 49 - 80 = -31$. $\Delta < 0$ pas de racine donc $S = \varnothing$.

EXERCICE 2

Équations **(4 points)**

1) $-x^2 + 4x + 5 = 0$. $x_1 = -1$ racine évidente $P = -5$ donc $x_2 = \dfrac{P}{x_1} = 5$ donc $S = \{-1\ ;\ 5\}$.

2) $2x^2 - 5x + 7 = 0$. $\Delta = 25 - 56 = -31$ comme $\Delta < 0$ pas de racine donc $S = \varnothing$.

3) $-\dfrac{1}{3}x^2 + 2x - 3 = 0 \quad \overset{\times(-3)}{\Leftrightarrow} \quad x^2 - 6x + 9 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-3)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3$ donc $S = \{3\}$.

4) $3x^2 - 2x - 7 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - 2x - 9 = 0$ on a $\Delta = 4 + 108 = 112 = 4^2 \times 7 > 0$:

$$x_1 = \frac{2 + 4\sqrt{7}}{6} = \frac{1 + 2\sqrt{7}}{3} \quad \text{ou} \quad x_2 = \frac{1 - 2\sqrt{7}}{3} \quad \text{donc} \quad S = \left\{\frac{1 - 2\sqrt{7}}{3}\ ;\ \frac{1 + 2\sqrt{7}}{3}\right\}$$

EXERCICE 3

Équations bicarrées **(3 points)**

1) a) Pour qu'il y ait des solution en x, on doit avoir $X \geqslant 0$.

b) $X^2 - 6X + 8 = 0$ on a $\Delta = 36 - 32 = 4 = 2^2 > 0$ deux racines :

$$X_1 = \frac{6+2}{2} = 4 \quad \text{ou} \quad X_2 = \frac{6-2}{2} = 2$$

c) Les deux racines en X sont positives. On revient à x :

$$x^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \pm 2 \quad \text{ou} \quad x^2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{2} \quad \text{donc} \quad S = \left\{-2\ ;-\sqrt{2}\ ;\ \sqrt{2}\ ;\ 2\right\}$$

2) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$, on pose $X = x^2$, l'équation devient : $X^2 - 8X - 9 = 0$.

$X_1 = -1 < 0$ racine évidente (non retenu), $P = -9$ donc $X_2 = \dfrac{P}{X_1} = 9 > 0$ retenu.

On revient à x : $x^2 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 3$ donc $S = \{-3\ ;\ 3\}$

EXERCICE 4

Inéquation **(4 points)**

1) $x^2 - 2x < 0 \qquad x(x-2) < 0$, deux racines $x_1 = 0$ ou $x_2 = 2$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$-x^2 - 2x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S =]0\ ;\ 2[$

2) $6x^2 - 15x + 4 \geqslant -2 \quad \Leftrightarrow \quad 6x^2 - 15x + 6 \geqslant 0 \quad \overset{\div 3}{\Leftrightarrow} \quad 2x^2 - 5x + 2 \geqslant 0$

$\Delta = 25 - 16 = 9 = 3^2 > 0$, deux racines $x_1 = \dfrac{5+3}{4} = 2$ ou $x_2 = \dfrac{5-3}{4} = \dfrac{1}{2}$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$6x^2 - 15x + 6$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$S = \left]-\infty\ ;\ \frac{1}{2}\right] \cup [2\ ;\ +\infty[$$

3) $\dfrac{-3x^2 - 4x + 7}{2x+1} \geqslant 0 \qquad D_f = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$

$-3x^2 - 4x + 7 = 0$ on a $x_1 = 1$ racine évidente $P = -\dfrac{7}{3}$ donc $x_2 = \dfrac{P}{x_1} = -\dfrac{7}{3}$.

En faisant un tableau de signes (voir ci-après), on trouve : $S = \left]-\infty\ ;-\dfrac{7}{3}\right] \cup \left]-\dfrac{1}{2}\ ;\ 1\right]$

x	$-\infty$		$-\frac{7}{3}$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$-3x^2-4x+7$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$2x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{-3x^2-4x+7}{2x+1}$		$+$	0	$-$	||	$+$	0	$-$	

EXERCICE 5

Équation paramétrique **(2 points)**

1) Si $m=-3$ l'équation est du premier degré. (E_{-3}) : $-3x+1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3}$

2) $m \neq -3$, on a :

$$\begin{aligned}\Delta &= m^2-4(m+3)=m^2-4m-12=(m-2)^2-4-12=(m-2)^2-16\\ &=(m-2-4)(m-2+4)=(m-6)(m+2)\end{aligned}$$

3) (E_m) admet qu'une seule solution si l'équation est du premier degré ou si $\Delta=0$.

Les valeurs de m qui conviennent sont : $\{-3\,;-2\,;\,6\}$.

EXERCICE 6

Problème d'entier **(2 points)**

Soit x le plus petit des deux entiers consécutifs. On a :

$$x^2+(x+1)^2=4141 \Leftrightarrow x^2+x^2+2x+1=4141 \Leftrightarrow 2x^2+2x-4140=0 \overset{\div 2}{\Leftrightarrow} x^2+x-2070=0$$

$\Delta=1+8280=8281=91^2$, deux solutions $x_1=\dfrac{-1+91}{2}=45$ ou $x_2=\dfrac{-1-91}{2}=-46$.

Il existe deux couples d'entiers consécutifs qui répondent au problème : $(45,46)$ ou $(-46,-45)$.