Correction contrôle de mathématiques

Du jeudi 12 décembre 2019

EXERCICE 1

Monotonie d'une suite **(2 points)**

1) $$u_{n+1}-u_n = \frac{n+1-3}{2(n+1)+1}-\frac{n-3}{2n+1} = \frac{n-2}{2n+3}-\frac{n-3}{2n+1} = \frac{(n-2)(2n+1)-(n-3)(2n+3)}{(2n+1)(2n+3)}$$
$$= \frac{2n^2+n-4n-2-2n^2+3n-6n+9}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{7}{(2n+3)(2n+1)}.$$

2) $\forall n \in \mathbb{N},\ (2n+1)(2n+3) \geqslant 3 > 0 \Rightarrow u_{n+1}-u_n > 0$. La suite (u_n) est croissante.

EXERCICE 2

Suite arithmétique et suite géométrique **(5 points)**

1) a) $$u_7 = u_4 + (7-4)r \Leftrightarrow 3r = u_7 - u_4 \Leftrightarrow r = \frac{u_7-u_4}{3} = \frac{\frac{1}{2}+4}{3} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$
$$u_4 = u_0 + 4r \Leftrightarrow u_0 = u_4 - 4r = -4 - 4\times\frac{3}{2} = -10.$$

b) $$u_{14} = u_0 + 14r = -10 + 14\times\frac{3}{2} = 11.$$

2) S est la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison (-6) et de premier terme 700.

Nombre de termes : $\dfrac{310-700}{-6}+1 = 66$ (règle des piquets et des intervalles)

$$S = \text{Nbre de termes} \times \frac{\text{somme des termes extrèmes}}{2} = 66\times\frac{700+310}{2} = 33\,330.$$

3) a) $$v_6 = q^{6-2}v_2 = q^4 v_2 \Leftrightarrow q^4 = \frac{v_6}{v_2} = \frac{144}{9} = 16 = 2^4 \overset{q>0}{\Rightarrow} q = 2$$
$$v_2 = q^2 v_0 \Leftrightarrow v_0 = \frac{v_2}{q^2} = \frac{9}{4}$$

b) S' est la somme des 12 premiers termes d'une suite géométrique de raison $q=2$ et de premier terme $v_0 = \frac{9}{4}$.

$$S' = \text{premier terme} \times \frac{1-q^{\text{Nbre de termes}}}{1-q} = \frac{9}{4}\times\frac{1-2^{12}}{1-2} = \frac{9\times 4095}{4} = 9\,213,75$$

EXERCICE 3

Suite récurrente à deux termes **(2 points)**

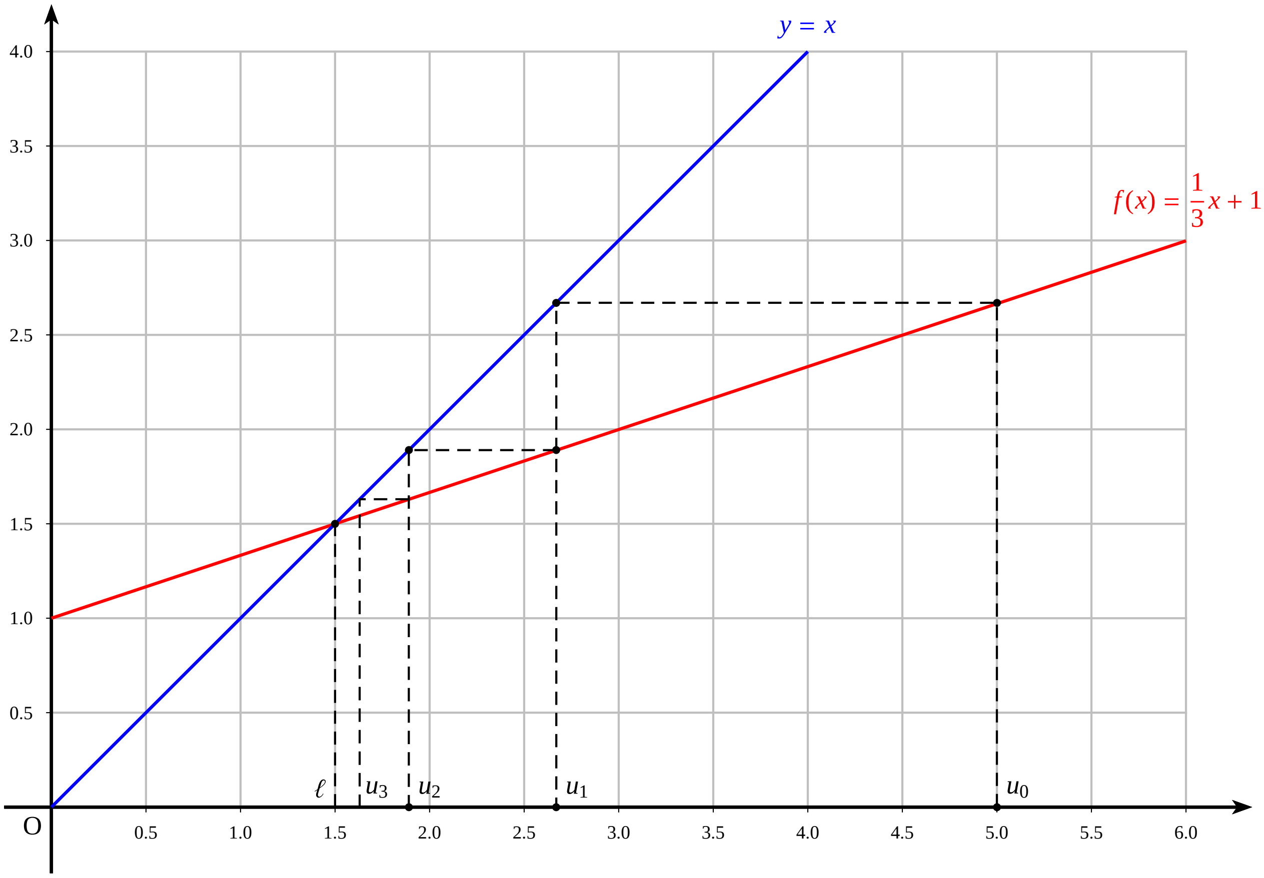
1) $u_2 = 2u_1+u_0 = 2+3 = 5,\quad u_3 = 2u_2+u_1 = 10+1 = 11,\quad u_4 = 2u_3+u_2 = 22+5 = 27$

2) On trouve $u(12) = 31\ 083$

EXERCICE 4

Suite arithmético-géométrique **(5 points)**

1) a) On obtient la graphique suivant :



b) Conjectures : La suite (u_n) est décroissante et converge vers $\ell = 1,5$.

2) a) $v_{n+1} = u_{n+1} - \dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{3}u_n + 1 - \dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{3}u_n - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3}\left(u_n - \dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{1}{3}v_n$.

$\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{1}{3}$, donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - \dfrac{3}{2} = \dfrac{7}{2}$.

b) $v_n = v_0\, q^n = \dfrac{7}{2} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$. D'où $u_n = v_n + \dfrac{3}{2} = \dfrac{7}{2} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n + \dfrac{3}{2}$.

c) La suite (q^n) est décroissante car $0 < q = \dfrac{1}{3} < 1$ donc par produit avec $\dfrac{7}{2}$, la suite (v_n) est décroissante et par somme la suite (u_n) est décroissante.

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$ car $-1 < \dfrac{1}{3} < 1$.

Par produit et somme, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{3}{2}$

EXERCICE 5

Voyage en vélo **(6 points)**

Partie A : méthode algorithmique

1) On a l'algorithme suivant : $\rightarrow$

Entrées et initialisation
- $1 \rightarrow n$
- $20 \rightarrow u$
- $20 \rightarrow s$

Traitement
- **tant que** $s < 2000$ **faire**
  - $n + 1 \rightarrow n$
  - $u + 5 \rightarrow u$
  - $s + u \rightarrow s$
- **fin**

Sorties : Afficher n

2) On trouve alors : $n = 25$

Partie B : méthode algébrique

1) On trouve le nombre de km effectués par Aurélien le jour n en ajoutant 5 au nombre de km effectués par Aurélien le jour précédent. La suite (u_n) est alors arithmétique de raison $r = 5$.

   On a alors : $u_n = u_1 + (n-1)r = 20 + 5(n-1)$

2) Soit S_n le nombre de km effectués par Aurélien pendant les n premiers jours. Aurélien arrive à Stockholm lorsque $S_n = 2000$.

$$S_n = 2000 \quad \Leftrightarrow \quad n \times \left(\frac{u_1 + u_n}{2}\right) = 2000 \quad \Leftrightarrow \quad n(u_1 + u_n) = 4000 \quad \Leftrightarrow$$

$$n[20 + 20 + 5(n-1)] = 4000 \quad \Leftrightarrow \quad n(40 + 5n - 5) = 4000 \quad \Leftrightarrow \quad n(5n + 35) = 4000 \quad \Leftrightarrow$$

$$5n^2 + 35n - 4000 = 0 \quad \overset{\div 5}{\Leftrightarrow} \quad n^2 + 7n - 800 = 0$$

3) On résout cette équation du second degré en prenant la racine positive.

$$\Delta = 49 + 3200 = 3249 = 57^2 \quad \text{la racine positive est alors :} \quad n = \frac{-7 + 57}{2} = 25.$$

   On retrouve alors le résultat donné par l'algorithme. Aurélien mettra 25 jours pour relier Paris à Stockholm.