Correction contrôle de mathématiques

Du jeudi 06 février 2020

EXERCICE 1

Nombre dérivé **(3 points)**

1) On obtient :

x	-3	-1	3	8
$f(x)$	1	2	-2	1
$f'(x)$	2	0	-1	4

2) On utilise l'approximation affine : $f(a+h) \approx f(a) + hf'(a)$
avec $f(x) = x^7$, $f'(x) = 7x^6$ $a = 1$ et $h = 0,02$.

$(1,02)^7 \approx 1^7 + 0,02 \times 7(1)^6 \approx 1,14$

EXERCICE 2

Calcul de dérivées **(8 points)**

Pour les fonctions suivantes :

1) $f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 3x - \sqrt{3}$, f dérivable sur $\mathbb{R}$, $f'(x) = 6x^2 - 14x + 3$

2) $f(x) = 2x + 3 - \dfrac{1}{x^4}$, f dérivable sur $\mathbb{R}^*$, $f'(x) = 2 + \dfrac{4}{x^5} = \dfrac{2(x^5+2)}{x^5}$

3) $f(x) = \sqrt{2-x}$, f dérivable sur $]-\infty, 2[$, $f'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{2-x}}$

4) $f(x) = \dfrac{5}{x^2-1}$, f dérivable sur $\mathbb{R} - \{-1,\ 1\}$, $f'(x) = \dfrac{-5(2x)}{(x^2-1)^2} = \dfrac{-10x}{(x^2-1)^2}$

5) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+4}$, f dérivable sur $\mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{2(x^2+4) - (2x)(2x)}{(x^2+4)^2} = \dfrac{8-2x^2}{(x^2+4)^2}$

$$f'(x) = \frac{2(2-x)(2+x)}{(x^2+4)^2}$$

6) $f(x) = (x+1)\sqrt{2x-5}$, f dérivable sur $\left]\dfrac{5}{2}; +\infty\right[$,

$$f'(x) = 1 \times \sqrt{2x-5} + (x+1) \times \frac{2}{2\sqrt{2x-5}} = \frac{3x-4}{\sqrt{2x-5}}$$

7) $f(x) = (3-2x)^3$, f dérivable sur $\mathbb{R}$, $f'(x) = 3 \times (-2)(3-2x)^2 = -6(3-2x)^2$

EXERCICE 3

Étude d'une fonction **(5 points)**

1) $f'(x) = \dfrac{(2x-4)(x-1) - 1(x^2-4x+7)}{(x-1)^2} = \dfrac{2x^2 - 2x - 4x + 4 - x^2 + 4x - 7}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$

2) $f'(x) = 0$, $\quad x_1 = -1$ racine évidente, $P = -3$ donc $x_2 = 3$.
Signe $f'(x) = \text{signe }(x^2 - 2x - 3)$ car $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$, $\quad (x-1)^2 > 0$

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-6	$\searrow$	$-\infty \ \Vert \ +\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

$$f(-1) = \frac{1+4+7}{-2} = -6$$

$$f(3) = \frac{9-12+7}{2} = 2$$

3) (T) : $y = f'(2)(x-2) + f(2)$ $\quad$ avec $f'(2) = -3$ et $\quad f(2) = 3$
(T) : $y = -3(x-2) + 3 \quad \Leftrightarrow \quad y = -3x + 9$

4) $f'(x) = \dfrac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} = \dfrac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 - 4x - 6 = x^2 - 2x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x - 7 = 0$

$\Delta = 4 + 28 = 32 = (4\sqrt{2})^2$ d'où $x_1 = \dfrac{2 + 4\sqrt{2}}{2} = 1 + 2\sqrt{2}$ ou $x_2 = 1 - 2\sqrt{2}$.

Il existe 2 tangentes à la courbe $\mathscr{C}_f$ parallèles à la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}x - 5$ en $x = 1 + 2\sqrt{2}$ et $x = 1 - 2\sqrt{2}$.

5) $f'(x) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x - 3 = 2x^2 - 4x + 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x + 5$
$\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$, pas de solution.
Il n'existe pas de tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ parallèles à la droite d'équation $y = 2x + 1$

Exercice 4

Équation du troisième degré **(4 points)**

1) $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$.
- $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$ ou $x = 2$.
- Signe $f'(x) =$ signe du trinôme.

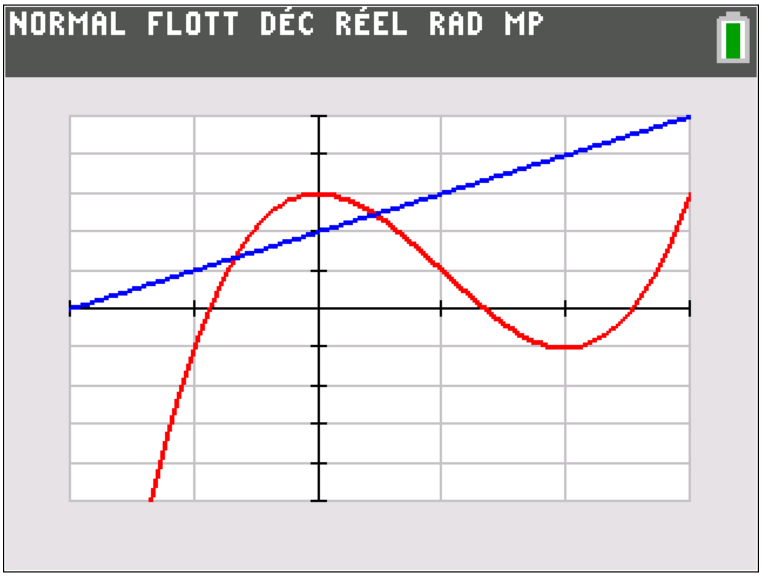
x	-2		0		2		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-17	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3

2) D'après le tableau de variation, $f(x)$ change trois fois de signe entre -2 et 0, entre 0 et 2 et entre 2 et 3. L'équation $f(x) = 0$ a donc trois solutions.

3) On obtient sur la calculatrice (voir page suivante) :

a) À l'aide de l'instruction "*racine*" de la calculatrice, on trouve les trois solutions suivantes : $x_1 \approx -0,879$, $x_2 \approx 1,347$, $x_3 \approx 2,532$

b) On trace sur la calculatrice la droite $y = x + 2$ puis on cherche les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ qui sont sur ou au dessus de la droite d"équation $y = x + 2$.
En utilisant l'instruction "*intersection*" de la calculatrice, on trouve :
$S = [-0,675 \ ; \ 0,461]$


NORMAL FLOTT DÉC RÉEL RAD MP