Contrôle de mathématiques

Lundi 16 mars 2020

EXERCICE 1

Propriétés algébriques **(5 points)**

1) Simplifier les expressions suivantes :

a) $A = \dfrac{e^5 \times e^{-3}}{e^{-2}}$ b) $B = \dfrac{e^{1+x}}{e^{x+2}}$ c) $C = \left(\dfrac{e}{e^{-x}}\right)^4$

2) Montrer les égalités suivant pour tout $x \in \mathbb{R}$:

a) $(e^x + 1)^2 + (e^x - 1)^2 = 2(e^{2x} + 1)$ b) $\dfrac{e^{3x} - e^{2x}}{e^{3x} + e^{2x}} = \dfrac{e^{2x} - 1}{(e^x + 1)^2}$

EXERCICE 2

Résolution équation et inéquation **(4 points)**

1) Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$ en se justifiant rigoureusement :

a) $e^{-2x+1} - e^4 = 0$ b) $e^{x^2+x+4} = e^2 e^{4x}$

2) Résoudre les inéquations suivante dans $\mathbb{R}$ en se justifiant rigoureusement :

a) $e^{-x+2} - 1 \geqslant 0$ b) $(e^x - 1)(2e^x + 1) \leqslant 0$

EXERCICE 3

Étude des fonctions **(5 points)**

1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (4 - x)\,e^x$

a) Calculer $f'(x)$.

b) Étudier les variations de f puis dresser le tableau de variation de f. On pourra utiliser sa calculatrice pour déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

2) Soit la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x^2}\,e^{-\frac{1}{x}}$

a) Montrer que $f'(x) = \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}(1 - 2x)}{x^4}$.

b) Étudier les variations de f puis dresser le tableau de variation de f. On pourra utiliser sa calculatrice pour déterminer les limites de f en 0 et $+\infty$.

c) Tracer la courbe $\mathscr{C}_g$ sur le graphique donné en annexe. On fera figurer la tangente horizontale et on pourra calculer les valeurs de $f(0,5)$, $f(2)$ et $f(4)$.

EXERCICE 4

Couples de lapins **(3 points)**

Un couple de lapins est introduit dans une île qui ne contient pas de prédateurs. L'accroissement de la population de lapin d'une année à l'autre est alors proportionnel à l'effectif de cette population. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle p_n la population de lapins à l'année n.

On peut alors établir que : $p_n = 2\, e^{\frac{3}{2}n}$

1) Montrer que (p_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.
2) Donner une estimation de la population de lapin au bout de 2 ans.
3) Au bout de combien d'années la population de lapin a été multiplier par 1000. On pourra utiliser un raisonnement par tâtonnement.
4) Ce modèle est-il réaliste pour estimer la population de lapin au bout de 10 ans ?

EXERCICE 5

Algorithme **(3 points)**

On veut résoudre dans $I = [0\,;+\infty[$, l'équation (E) $e^x = x + 3$.
On ne peut trouver la valeur exacte de la solution, car elle ne s'exprime pas à l'aide de fonction élémentaires.
On cherche à déterminer une valeur approchée de cette solution. On définit la fonction f sur I par $f(x) = e^x - x - 3$.

1) Montrer que la fonction f est croissante sur I.
2) On donne $f(3) \approx 14$. Pourquoi (E) admet une unique solution α sur I ?
3) On donne le programme en python suivant :
   La fonction exp est à rentrer avec :
   Module / math / 4 : exp()

```
from math import *
def f(x):
    return exp(x)-x-3
x=0
y=f(x)
while y<0:
    x=x+0.01
    y=f(x)
print(x)
```

   a) Que renvoie ce programme ? Est-ce une valeur par excès ou par défaut ?
   b) Quelle est la valeur affichée en sortie ? En déduire un encadrement de α à 10^{-2} près.
   c) Modifier cet algorithme pour qu'il renvoie une valeur approchée de α à 10^{-3} près. Donner alors cette valeur et l'encadrement de α correspondant.

Annexe exercice 3

Nom :

Prénom :