# Correction contrôle de mathématiques

## Du lundi 16 mars 2020

## EXERCICE 1

**Propriétés algébriques** **(5 points)**

1) a) $A = e^{-4}$ b) $B = e^{-1}$ c) $C = e^{4+4x}$

2) a) $(e^x + 1)^2 + (e^x - 1)^2 = (e^x)^2 + 2e^x + 1 + (e^x)^2 - 2e^x + 1 = 2e^{2x} + 2 = 2(e^{2x} + 1)$

b) $\dfrac{e^{3x} - e^{2x}}{e^{3x} + e^{2x}} = \dfrac{e^{2x}(e^x - 1)}{e^{2x}(e^x + 1)} = \dfrac{(e^x - 1)(e^x + 1)}{(e^x + 1)^2} = \dfrac{(e^x)^2 - 1}{(e^x + 1)^2} = \dfrac{e^{2x} - 1}{(e^x + 1)^2}$

## EXERCICE 2

**Résolution équation et inéquation** **(4 points)**

1) On utilise la propriété de la monotonie de la fonction exponentielle :

a) $e^{-2x+1} - e^4 = 0 \Leftrightarrow e^{-2x+1} = e^4 \overset{\text{exp monotone}}{\Leftrightarrow} -2x + 1 = 4 \Leftrightarrow x = -\dfrac{3}{2}$

$S = \left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$

b) $e^{x^2+x+4} = e^2 e^{4x} \Leftrightarrow e^{x^2+x+4} = e^{4x+2} \overset{\text{exp monotone}}{\Leftrightarrow} x^2+x+4 = 4x+2 \Leftrightarrow x^2-3x+2 = 0$

$x_1 = 1$ racine évidente, $P = 2$ donc $x_2 = 2$ d'où $S = \{1 ; 2\}$

2) On utilise la propriété de la croissance de la fonction exponentielle :

a) $e^{-x+2} - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow e^{-x+2} \geqslant e^0 \overset{\exp\nearrow}{\Leftrightarrow} -x + 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 2$. d'où $S = ]-\infty ; 2]$.

b) $(e^x - 1)(2e^x + 1) \leqslant 0 \overset{\forall x \in \mathbb{R},\ 2e^x+1>0}{\Leftrightarrow} e^x - 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow e^x \leqslant e^0 \overset{\exp\nearrow}{\Leftrightarrow} x \leqslant 0$

$S = ]-\infty ; 0]$

## EXERCICE 3

**Étude des fonctions** **(5 points)**

1) a) $f'(x) = -e^x + (4 - x)\,e^x = e^x(-1 + 4 - x) = (3 - x)\,e^x$.

b) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3 - x = 0 \Leftrightarrow x = 3$ car $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x > 0$.

Signe de $f'(x)$ = signe de $(3 - x)$.

| $x$ | $-\infty$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | ↗ | $e^3$ | ↘ | $-\infty$ |

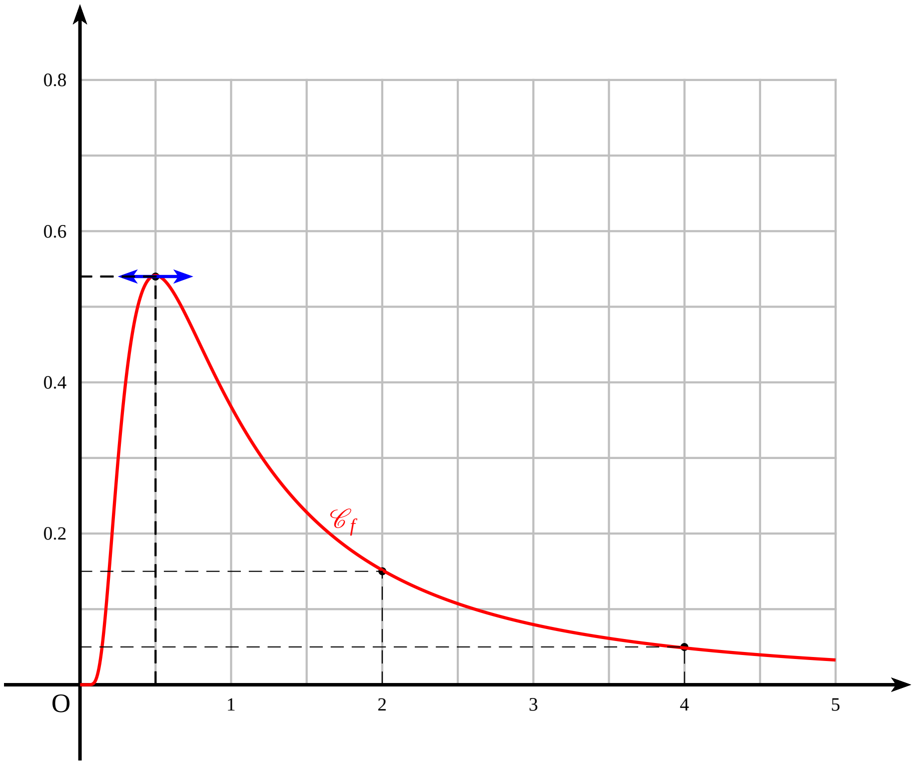
2) a) $f'(x) = -\dfrac{2}{x^3}\,e^{-\frac{1}{x}} + \dfrac{1}{x^2}\left(-\dfrac{-1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{x}}\left(-\dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{x^4}\right) = \left(\dfrac{-2x+1}{x^4}\right)e^{-\frac{1}{x}}.$

b) $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2x+1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{1}{2}$ car $\forall x > 0,\ \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^4} > 0.$

Signe de $f'(x)$ = signe de $(-2x+1)$.

| $x$ | $0$ | | $\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | ‖ $0$ | ↗ | $4\,e^{-2}$ | ↘ | $0$ |

c) $f(0,5) \approx 0,54$, $f(2) \approx 0,15$ et $f(4) \approx 0,05$.




## EXERCICE 4

**Couples de lapins** **(3 points)**

Un couple de lapins est introduit dans une île qui ne contient pas de prédateurs. L'accroissement de la population de lapin d'une année à l'autre est alors proportionnel à l'effectif de cette population. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle $p_n$ la population de lapins à l'année $n$.

On peut alors établir que : $p_n = 2\,e^{\frac{3}{2}n}$

1) $p_{n+1} = 2\,e^{\frac{3}{2}(n+1)} = 2\,e^{\frac{3}{2}n} \times e^{\frac{3}{2}} = p_n \times e^{\frac{3}{2}}.$

$\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{p_{n+1}}{p_n} = e^{\frac{3}{2}}$, donc la suite $(p_n)$ est géométrique de raison $q = e^{\frac{3}{2}} \approx 4,48$ et de premier terme $p_0 = 2$.

2) $p_2 = 2\,e^3 \approx 40$. La population de lapins au bout de 2 ans est de 40.

3) On trouve : $p_4 \approx 806 < 2000$ et $p_5 \approx 3616 > 2000$.
La population de lapin a été multiplié par 1000 au bout de 5 ans.
Remarque : pour une variation continue entre 4 et 5 ans : $n \approx 4,6$ soit 4 ans et 7 mois.

4) $p_{10} \approx 6\,538\,034$ soit une population de 6,5 millions au bout de 10 ans ! Ce n'est pas réaliste car la nourriture n'est pas infinie, même en l'absence de prédateurs.

## Exercice 5

**Algorithme** **(3 points)**

1) $f'(x) = e^x - 1$. $\forall x \geqslant 0$, $e^x \geqslant e^0 = 1 \Rightarrow f'(x) \geqslant 0$.
La fonction $f$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

2) $f(0) = -3$ $f(3) \approx 14$. La fonction $f$ étant croissante sur $\mathbb{R}_+$, elle ne peut s'annuler qu'une seule fois sur $\mathbb{R}_+$. Comme $f(x)$ change de signe entre 0 et 3, la fonction $f$ s'annule sur $[0\,;3]$.

3) a) Le programme renvoie une approximation par excès à $10^{-2}$ de $\alpha$. En effet, le programme quitte la boucle conditionnelle pour $y > 0$ donc pour une valeur de $f(x) > 0$.

b) La valeur affichée est 1,51. Donc $1,50 \leqslant \alpha \leqslant 1,51$

c) Il suffit de modifier l'incrémentation de $x$, avec l'instruction $x = x + 0,001$.
On trouve alors : 1,506. Donc $1,505 \leqslant \alpha \leqslant 1,506$

## Annexe exercice 3

Nom :

Prénom :