Correction contrôle de mathématiques

Du lundi 14 novembre 2022

EXERCICE 1

QCM **(5 points)**

1) **Réponse c)**

$$f(x) = 2(x^2 - x - 6) = 2\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 6\right] = 2\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}\right] = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{2}$$

2) **Réponse b)**

$(3x^2 - 12x + 12)(x - 2) = 0 \;\Leftrightarrow\; 3(x^2 - 4x + 4)(x - 2) = 0 \;\Leftrightarrow\; 3(x - 2)^3 \;\Leftrightarrow\; x = 2$

3) **Réponse c)**

Racines de $x^2 - 5x - 6 < 0$ $\quad x_1 = -1$ racine évidente, $P = -6$, donc $x_2 = 6$.

x	$-\infty$		-1		6		$+\infty$
$x^2 - 5x - 6$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S =]-1\,;\,6[$

4) **Réponse d)**

a) faux, $a < 0$, car $\mathscr{C}$ concave et $c > 0$, car $\mathscr{C}$ coupe l'axe des ordonnées pour $y > 0$.

b) faux, $a < 0$ et $b > 0$ car l'abscisse du sommet $-\dfrac{b}{2a} > 0 \overset{a<0}{\Rightarrow} b > 0$

c) faux, $a < 0$ et $\Delta > 0$ car $\mathscr{C}$ coupe deux fois l'axe des abscisses.

d) vrai $c > 0$ et $\Delta > 0$.

5) **Réponse b)**

(E_m) admet une racine double si $\Delta = 0$

$\Delta = (2m+3)^2 - 4m^2 = 4m^2 + 12m + 9 - 4m^2 = 12m + 9$ donc $\Delta = 0 \;\Leftrightarrow\; m = -\dfrac{9}{12} = -\dfrac{3}{4}$

EXERCICE 2

Équation du second degré **(5 points)**

1) $x^2 - x - 6 = 0$, on a $\Delta = 1 + 24 = 25 = 5^2$, $\Delta > 0$ deux solutions :

$$x_1 = \frac{1 + 5}{2} = 3 \text{ ou } x_2 = \frac{1 - 5}{2} = -2 \text{ donc } S = \{-2\,;\,3\}$$

2) $4x^2 + 9x - 9 = 0$, on a $\Delta = 81 + 144 = 225 = 15^2$, $\Delta > 0$ deux solutions :

$$x_1 = \frac{-9 + 15}{8} = \frac{3}{4} \text{ ou } x_2 = \frac{-9 - 15}{8} = -3 \text{ donc } S = \left\{-3\,;\,\frac{3}{4}\right\}$$

3) $16x^2 + 24x + 9 = 0$, on a $\Delta = 576 - 576 = 0$, $\Delta = 0$ une solution double :

$$x_0 = -\frac{24}{32} = -\frac{3}{4} \text{ donc } S = \left\{-\frac{3}{4}\right\}$$

4) $x^2 - 3x + 2 = 6x^2 + x + 1 \;\Leftrightarrow\; -5x^2 - 4x + 1 = 0$,

$x_1 = -1$ solution évidente, $P = -\dfrac{1}{5}$ d'où $x_2 = \dfrac{1}{5}$ donc $S = \left\{-1\,;\,\dfrac{1}{5}\right\}$

5) $\dfrac{4}{x-1} - \dfrac{3}{x-2} = -1, \quad D_f = \mathbb{R} - \{1\,;\,2\}.$

$x \in D_f$, on multiplie par $(x-1)(x-2)$

$$4(x-2) - 3(x-1) = -(x-1)(x-2) \Leftrightarrow 4x - 8 - 3x + 3 = -x^2 + 2x + x - 2$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$x_1 = -1 \in D_f$ solution évidente, $P = -3$ d'où $x_2 = 3 \in D_f$ donc $S = \{-1\,;\,3\}$

Exercice 3

Inéquation du second degré **(4 points)**

1) $\dfrac{1}{2}x^2 + 3x - 8 > 0, \quad \Delta = 9 + 16 = 25 = 5^2, \ \Delta > 0$ deux racines :

$$x_1 = \frac{-3+5}{1} = 2 \text{ ou } x_2 = \frac{-3-5}{1} = -8$$

x	$-\infty$		-8		2		$+\infty$
$\frac{1}{2}x^2+3x-8$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S =]-\infty\,;-8[\cup]2\,;+\infty[$

2) $3x + \dfrac{1}{2x} \leqslant \dfrac{5}{2}, \quad D_f = \mathbb{R}^*$, l'inéquation devient :

$\dfrac{6x^2+1-5x}{2x} \geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{6x^2-5x+1}{2x} \leqslant 0$ racines de $6x^2 - 5x + 1$

$\Delta = 25 - 24 = 1, \ \Delta > 0$ deux racines $x_1 = \dfrac{5+1}{12} = \dfrac{1}{2}$ ou $x_2 = \dfrac{5-1}{12} = \dfrac{1}{3}$

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$6x^2-5x+1$		$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	
$2x$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$\dfrac{6x^2-5x+1}{2x}$		$-$	||	$+$	0	$-$	0	$+$	

$S =]-\infty\,;\,0[\cup \left[\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$

3) $\dfrac{3x^2-5x}{x-1} \geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{x(3x-5)}{x-1} \geqslant 0, \quad D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

Les valeurs frontières sont : $0, \dfrac{5}{3}, 1$

x	$-\infty$		0		1		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$3x^2-5x$		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$\dfrac{3x^2-5x}{x-1}$		$-$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	

$S = [0\,;\,1[\cup \left[\dfrac{5}{3}\,;+\infty\right[$

Exercice 4

Avec un changement de variable **(4 points)**

1) $x^4 - 12x^2 + 27 = 0$, on pose $X = x^2$ avec $X \geqslant 0$, l'équation devient :

$X^2 - 12X + 27 = 0$, on a $\Delta = 144 - 108 = 36 = 6^2$, $\Delta > 0$ deux solutions :

$$X_1 = \frac{12+6}{2} = 9 \text{ ou } X_2 = \frac{12-6}{2} = 3 \text{ on revient à } x$$

$(x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3 \text{ ou } x = -3)$ ou $(x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \sqrt{3} \text{ ou } x = -\sqrt{3})$

donc $S = \left\{-3\,;-\sqrt{3}\,;\ \sqrt{3}\,;\ 3\right\}$

2) $2x + 5\sqrt{x} - 3 = 0$, $D_f = [0\,;+\infty[$, on pose $X = \sqrt{x}$ avec $X \geqslant 0$, l'équation devient :

$2X^2 + 5X - 3 = 0$, on a $\Delta = 25 + 24 = 49 = 7^2$, $\Delta > 0$ deux solutions :

$$X_1 = \frac{-5+7}{4} = \frac{1}{2} \text{ ou } X_2 = \frac{-5-7}{4} = -3 \text{ (non retenue) on revient à } x$$

$\sqrt{x} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{4}$ donc $S = \left\{\dfrac{1}{4}\right\}$

Exercice 5

Problème **(2 points)**

Soit a la longueur et b la largeur du rectangle cherché. D'après l'énoncé :

$$\begin{cases} 2(a+b) = 34 \\ ab = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = 17 \\ ab = 60 \end{cases}$$

D'après les relations somme et produit des racines du second degré, a et b sont solutions de : $x^2 - 17x + 60 = 0$.

$\Delta = 289 - 240 = 49 = 7^2 > 0$ deux solutions $x_1 = \dfrac{17+7}{2} = 12$ ou $x_2 = \dfrac{17-7}{2} = 5$.

La longueur du rectangle est de 12 cm et la largeur 5 cm.