BACCALAURÉAT BLANC

DE MATHÉMATIQUES

PREMIÈRE

Durée de l'épreuve : 2 HEURES
Les calculatrices sont AUTORISÉES

Coefficient : 8

Sur l'en-tête de votre copie, précisez clairement et distinctement :

- *le nom de l'épreuve : épreuve de mathématiques.*

EXERCICE 1 (5 points)

1) **Réponse c) :** On dérive comme $(uv)' = u'v + uv'$

$$f'(x) = 2\,\mathrm{e}^{-x} + (2x-1)(-1)\,\mathrm{e}^{-x} = (2-2x+1)\,\mathrm{e}^{-x} = (-2x+3)\,\mathrm{e}^{-x}$$

2) **Réponse d) :** On détermine le coefficient directeur de la droite (T).

La droite (T) passe par le point A$(0\,;\,3)$ et B$(1\,;\,-2)$, d'où $f'(0) = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{-2-3}{1-0} = -5$.

3) **Réponse a) :** $x^2 = 6x - 5 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 6x + 5 = 0$.

$x_1 = 1$ est solution évidente, $P = 5$ donc $x_2 = \dfrac{P}{x_1} = 5$.

4) **Réponse d) :** L'équation de la tangente en $x = 2$ est $y = f'(2)(x-2) + f(2)$.

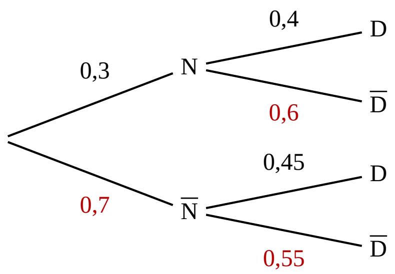
On a $f(2) = 2 \times 2^2 + 5 \times 2 - 4 = 14$ et $f'(x) = 4x + 5 \;\Rightarrow\; f'(2) = 13$.

L'équation de la tangente en 2 a pour équation : $y = 13(x-2) + 14 \;\Leftrightarrow\; y = 13x - 12$.

5) **Réponse c) :** $u_n = u_1 + (n-1)r = 2 - 5(n-1) = 2 - 5n + 5 = 7 - 5n$.

EXERCICE 2 (5,5 points)

1) D'après l'énoncé, on a les probabilités suivantes : $p(\mathrm{N}) = 0,3$, $p_{\mathrm{N}}(\mathrm{D}) = 0,4$ et $p_{\overline{\mathrm{N}}}(\mathrm{D}) = 0,45$



2) $p(\overline{\mathrm{N}} \cap \overline{\mathrm{D}}) = p(\overline{\mathrm{N}}) \times p_{\overline{\mathrm{N}}}(\overline{\mathrm{D}}) = 0,7 \times 0,55 = 0,385$.

38,5 % des automobilistes prennent uniquement l'autoroute entre Paris et Limoge.

3) $p(\overline{\mathrm{D}}) \overset{\text{proba totale}}{=} p(\mathrm{N} \cap \overline{\mathrm{D}}) + p(\overline{\mathrm{N}} \cap \overline{\mathrm{D}}) = p(\mathrm{N}) \times p_{\mathrm{N}}(\overline{\mathrm{D}}) + 0,385 = 0,3 \times 0,6 + 0,385 = 0,565$.

4) a) X prend les valeurs 5,5 $(\mathrm{N} \cap \mathrm{D})$, 6 $(\mathrm{N} \cap \overline{\mathrm{D}})$, 6,5 $(\overline{\mathrm{N}} \cap \mathrm{D})$ et 7 $(\overline{\mathrm{N}} \cap \overline{\mathrm{D}})$.

b) On a la loi de probabilité de X suivante :

x_i	5,5	6	6,5	7
$p(X = x_i)$	0,12	0,18	0,315	0,385

5) $\mathrm{E}(X) = 0,12 \times 5,5 + 0,18 \times 6 + 0,315 \times 6,5 + 0,385 \times 7 = 6,4825 \approx 6,48$.

En moyenne, les automobilistes mettent 6,48 h pour faire Paris - Limoge.

EXERCICE 3 (4,5 points)

1) Après une semaine $V = 80 - 80 \times 0,04 = 80 - 3,2 = 76,8\ \mathrm{m}^3$.

2) a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n - v_n \times 0,04 = 0,96 v_n$.

La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,96$ et de premier terme $v_0 = 80$.

b) $v_n = v_0\, q^n = 80 \times 0,96^n$.

c) $v_7 = 80 \times 0,96^7 \approx 60,12$.

Au bout de 7 semaines, le volume d'eau dans la piscine est de 60,12 m^3.

3) a) La nouvelle suite donnant le volume d'eau est définie par $v_{n+1} = 0,96v_n + 2$.
On a alors l'algorithme suivant :

```
def nbre(u):
    n=0
    v=80
    while v>=u:
        n=n+1
        v=0.96*v+2
    return n
```

b) Le programme renvoie : 10. Au bout de 10 semaines, le volume d'eau contenu dans la piscine est inférieur à 70 m^3.

Exercice 4 **(5 points)**

1) $f(0) = 0$ et $f(5) = 500\,\mathrm{e}^{-5} \approx 3,37 \approx 3$ à l'unité près.

2) a) On dérive comme $(uv)' = u'v + uv'$ d'où :

$$f'(t) = 100\,\mathrm{e}^{-t} + 100t(-1)\,\mathrm{e}^{-t} = (100 - 100t)\,\mathrm{e}^{-t} = 100(1-t)\,\mathrm{e}^{-t}$$

b) $f'(t) = 0 \overset{\mathrm{e}^{-t}\neq 0}{\Leftrightarrow} 1 - t = 0 \Leftrightarrow t = 1$.
signe de $f'(t)$ = signe de $(1-t)$ car $\forall t \in [0\,;\,5]$.

c) On obtient alors le tableau de variation suivant :

t	0		1		5
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	≈ 3

d) f admet un maximum en $t = 1$.
Le maximum vaut alors : $f(1) = 100\,\mathrm{e}^{-1} \approx 36,79 \approx 37$ à l'unité près.

3) On fait une résolution graphique pour résoudre $f(t) = 0,5$ avec $t > 1$.
On cherche l'abscisse, supérieur à 1, du point d'intersection entre la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite d'équation $y = 0,5$. On trouve alors $t = 4,5$.
Au bout de 4 h 30, on peut considérer que la pollution ne représente plus de danger.