E.1 On considère la suite (u_n) définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par les relations :

$$u_0 = 2\ ;\ u_1 = 3\ ;\ u_{n+1} = u_n + 2\cdot u_{n-1} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}^*$$

Déterminer les quatre premiers termes de la suite (u_n).

C.1 On a les premiers termes :

- $u_0 = 2$
- $u_1 = 3$
- $u_2 = u_1 + 2\cdot u_0 = 3 + 2\times 2 = 7$
- $u_3 = u_2 + 2\cdot u_1 = 7 + 2\times 3 = 7 + 6 = 13$

E.2 La suite (u_n) est définie par la formule explicite :

$$u_n = \frac{5+n}{n} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}^*$$

Déterminer le sens de variations de la suite (u_n).

C.2 Pour étudier les variations de la suite (u_n), considérons la différence de deux termes consécutifs de cette suite :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{5+(n+1)}{n+1} - \frac{5+n}{n}$$

$$= \frac{[5+(n+1)]\cdot n}{n(n+1)} - \frac{(5+n)(n+1)}{n(n+1)} = \frac{n^2+6n-(5+6n+n^2)}{n(n+1)}$$

$$= \frac{-5}{n(n+1)} < 0$$

La différence de deux termes consécutifs étant toujours négative, on en déduit que la suite est décroissante sur $\mathbb{N}$.

E.3 Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite arithmétique telle que :

$$v_7 = 13 \quad ; \quad v_{15} = 39$$

Déterminer la valeur du premier terme et de la raison de la suite.

C.3 On a la relation :

$$v_{15} = v_7 + 8\times r$$
$$v_{15} - v_7 = 8\cdot r$$
$$r = \frac{v_{15}-v_7}{8}$$
$$r = \frac{39-13}{8}$$
$$r = \frac{26}{8}$$
$$r = \frac{13}{4}$$

Pour déterminer le premier terme, on utilise :

$$v_7 = v_1 + (7-1)\cdot r$$
$$13 = v_1 + 6\times\frac{13}{4}$$
$$13 = v_1 + 3\times\frac{13}{2}$$
$$13 = v_1 + \frac{39}{2}$$
$$v_1 = 13 - \frac{39}{2}$$
$$v_1 = \frac{26}{2} - \frac{39}{2}$$
$$v_1 = -\frac{13}{2}$$

La suite (v_n) est arithmétique de premier terme $-\dfrac{13}{2}$ et de raison $\dfrac{13}{4}$.

E.4 Soit (v_n) une suite géométrique définie pour tout $n\in\mathbb{N}$, de raison $\dfrac{3}{2}$ et telle que $v_6 = 12$. Déterminer la valeur de v_3.

C.4 La suite (v_n) étant géométrique de raison $\dfrac{3}{2}$, on a la relation :

$$v_6 = v_3\times q^{6-3}$$
$$12 = v_3\times\left(\frac{3}{2}\right)^3$$
$$v_3 = \frac{12}{\left(\frac{3}{2}\right)^3}$$
$$v_3 = \frac{12}{\frac{3^3}{2^3}}$$
$$v_3 = 12\times\frac{2^3}{3^3}$$
$$v_3 = 2^2\times 3\times\frac{2^3}{3^3}$$
$$v_3 = \frac{2^5}{3^2}$$

E.5 On consière la suite (u_n) définie par la formule explicite :

$$u_n = \frac{1{,}2^n}{n} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}^*.$$

1. Donner l'expression simplifiée de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.
2. Montrer que (u_n) est croissante à partir du rang 5.

C.5

1. Pour tout entier naturel n non-nul, u_n est définie non-nul :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1{,}2^{n+1}}{n+1}}{\frac{1{,}2^n}{n}} = \frac{1{,}2^{n+1}}{n+1}\times\frac{n}{1{,}2^n} = 1{,}2\times\frac{n}{n+1}$$

2. Cherchons le rang à partir duquel la suite est croissante. Sachant que chaque terme de la suite est positif, cherchons le rang à partir duquel le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est supérieur à 1 :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$$
$$1{,}2\times\frac{n}{n+1} \geqslant 1$$
$$\frac{1{,}2\cdot n}{n+1} - 1 \geqslant 0$$
$$\frac{1{,}2n-(n+1)}{n+1} \geqslant 0$$
$$\frac{1{,}2n-n-1}{n+1} \geqslant 0$$
$$\frac{0{,}2n-1}{n+1} \geqslant 0$$

Le dénominateur du quotient étant positif, cette inéquation devient :

$$0{,}2n - 1 \geqslant 0$$
$$0{,}2n \geqslant 1$$
$$n \geqslant 5$$

On en déduit que la suite (u_n) est croissante à partir du rang 5.