

NOMBRES PREMIERS

Les exercices doivent être effectués suivant leur ordre d'apparition.

Exercice 1.

Comment reconnaître un nombre premier ?

1) Le nombre 97 est-il premier ?

Solution: Indication :

On effectue les divisions du nombre donné par les nombres premiers successifs, sans omission.

Si le reste est nul, le nombre n'est pas premier.

Si le reste n'est pas nul, on continue jusqu'à ce que le quotient devienne inférieur ou égal au diviseur. Le nombre donné est alors premier.

Aucune des divisions de 97 par 2, 3, 5, 7, 11 n'a un reste nul et le quotient de la dernière division est inférieur au diviseur premier. Le nombre 97 est donc premier.

2) Le nombre 259 est-il premier ?

Solution: On effectue la division du nombre 259 par 2, 3, 5, 7. 259 n'est pas divisible par 2 car son dernier chiffre n'est pas pair. 259 n'est pas divisible par 3 car la somme de ses chiffres $2 + 5 + 9 = 16$ n'est pas divisible par 3. 259 n'est pas divisible par 5 car son dernier chiffre 9 n'est ni 0, ni 5. $259 = 7 \times 37$. Le reste de la division de 259 par 7 est nul.

259 est divisible par 7. Le nombre 259 n'est pas un nombre premier.

Exercice 2.

Comment décomposer un nombre entier en un produit de facteurs premiers ?

Décomposer 2520 en produit de facteurs premiers.

Solution: Indication :

On divise le nombre donné par les nombres premiers successifs en écrivant à chaque fois le quotient obtenu sous le dividende.

on divise 2520 par le plus petit nombre possible, c'est à dire 2 : $2520 \div 2 = 1260$. Le diviseur 2 se note à droite du trait, le quotient 1260 sous 2520.

Le plus petit diviseur premier de 1260 est 2. $1260 \div 2 = 630$.

2 se note à droite, le quotient 630 se place sous 1260.

630 étant pair, son plus petit diviseur premier est 2. $630 \div 2 = 315$.

3 est le plus petit diviseur premier de 315. $315 \div 3 = 105$.

3 est le plus petit diviseur premier de 105. $105 \div 3 = 35$.

5 est le plus petit diviseur premier de 35. $35 \div 5 = 7$.

7 est premier, donc divisible par 7.

$7 \div 7 = 1$.

Finalement : $2520 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7$

$2520 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7$.

$2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7$ est la décomposition en produit de facteurs premiers de 2520.

Exercice 3

Déterminer si les nombres suivants sont premiers :

13 ; 18 ; 23 ; 27 ; 43 ; 319.

Solution: 13 est un **nombre premier** car les seuls diviseurs de 13 sont 1 et 13 ;

18 étant divisible par 2 et 3, ce n'est pas un **nombre premier** ;

23 n'est pas divisible par 2, 3, 5. D'autre part dans la division de 23 par 5, le quotient 4 est inférieur au diviseur 5 donc 23 est un **nombre premier** ;

27 est divisible par 3, ce n'est donc pas un nombre premier ;

43 n'est pas divisible par 2, 3, 5, 7 : $43 = 7 \times 6 + 1$. Le quotient 6 est inférieur au diviseur 7, donc 43 est un **nombre premier**.

$319 = 11 \times 29$ donc 319 est divisible par 11 et n'est pas un **nombre premier**.

Exercice 4

Déterminer le plus petit nombre non nul divisible par deux nombres premiers p et q distincts ?

Solution: Soient p et q deux nombres premiers distincts. Cela signifie que les seuls diviseurs positifs de p sont 1 et p et les seuls diviseurs positifs de q sont 1 et q. Par conséquent, le plus petit nombre non nul divisible par deux nombres premiers distincts est leur produit pq.

Exercice 5

Répondre par vrai ou faux :

1. Tous les nombres impairs sont premiers.
2. Aucun nombre pair n'est premier.
3. La différence entre deux nombres premiers est toujours deux.
4. Il y a une infinité de nombres premiers.

Solution: 1. Faux, tous les nombres impairs ne sont pas premiers. Par exemple 9 est un nombre impair divisible par 3.

2. Faux, deux est pair et c'est un nombre premier.

3. Faux, entre 7 et 11, il n'y a pas de nombre premier et $11 - 7 = 4 \neq 2$.

4. Vrai, il y a une infinité de nombres premiers.

Exercice 6

Déterminer le nombre de nombres premiers inférieurs à 100 se terminant par 2.

Solution: 2 est le seul nombre premier inférieur à 100 se terminant par 2 car les autres nombres se terminant par 2 sont des nombres pairs, donc au moins divisibles par 2.

Exercice 7

Décomposer en produit de facteurs premiers :
18 ; 24 ; 30 ; 42 ; 49 ; 196 ; 252 ; 455 ; 546 ; 840.

Solution: $18 = 2 \times 9 = 2 \times 3^2$
 $24 = 8 \times 3 = 2^3 \times 3$
 $30 = 2 \times 15 = 2 \times 3 \times 5$
 $42 = 2 \times 21 = 2 \times 3 \times 7$
 $49 = 7 \times 7 = 7^2$
 $196 = 2 \times 2 \times 7 \times 7 = 2^2 \times 7^2$
 $252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$
 $455 = 5 \times 7 \times 13$
 $546 = 2 \times 3 \times 7 \times 13$
 $840 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7$

Exercice 8

Simplifier les fractions suivantes en décomposant le numérateur et le dénominateur en produit de facteurs premiers.

$\frac{48}{75}$; $\frac{180}{126}$; $\frac{585}{1275}$; $\frac{360}{252}$; $\frac{32670}{792}$; $\frac{17303}{1859}$

Solution: Pour $\frac{48}{75}$:
 $48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^4 \times 3$ et $75 = 3 \times 5 \times 5 = 3 \times 5^2$, donc :
 $\frac{48}{75} = \frac{2^4 \times 3}{3 \times 5^2} = \frac{2^4}{5^2} = \frac{16}{25}$
 Pour $\frac{180}{126}$:
 $180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3^2 \times 5$ et $126 = 2 \times 3 \times 3 \times 7 = 2 \times 3^2 \times 7$, donc :
 $\frac{180}{126} = \frac{10}{7}$
 Pour $\frac{585}{1275}$:
 $585 = 3 \times 3 \times 5 \times 13 = 3^2 \times 5 \times 13$ et $1275 = 3 \times 5 \times 5 \times 17$ donc :
 $\frac{585}{1275} = \frac{39}{85}$
 Pour $\frac{360}{252}$:
 $360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^3 \times 3^2 \times 5$ et $252 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7 = 2^2 \times 3^2 \times 7$, donc :
 $\frac{360}{252} = \frac{10}{7}$
 Pour $\frac{32670}{792}$:

$$32670 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 11 \times 11 = 2 \times 3^3 \times 5 \times 11^2 \text{ et } 792 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 11 = 2^3 \times 3^2 \times 11,$$

donc :

$$\frac{32670}{792} = \frac{2 \times 3^3 \times 5 \times 11^2}{2^3 \times 3^2 \times 11} = \frac{3 \times 5 \times 11}{2^2} = \frac{165}{4}$$

Pour $\frac{17303}{1859}$:

$$17303 = 11 \times 11 \times 11 \times 13 = 11^3 \times 13 \text{ et } 1859 = 11 \times 13 \times 13 = 11 \times 13^2, \text{ donc :}$$

$$\frac{17303}{1859} = \frac{11^3 \times 13}{11 \times 13^2} = \frac{11^2}{13} = \frac{121}{13}$$