

## Définition

**Inéquation :** inégalité qui n'est vérifiée que pour certaine(s) valeur(s) d'une quantité  $x$  appelée inconnue.

### Règles de base :

- On ne change pas une inégalité si l'on **ajoute ou retranche** un même nombre de chaque côté de l'inégalité.
- On ne change pas une inégalité si l'on **multiplie ou divise** par un même nombre **strictement positif** chaque côté de l'inégalité.
- On inverse une inégalité si l'on **multiplie ou divise** par un même nombre **strictement négatif** chaque côté de l'inégalité.

## Intervalle dans $\mathbb{R}$

- **Section commençante :** "à partir de ..."

$$x \geq a \Leftrightarrow x \in [a; +\infty[ \quad \text{et} \quad x > a \Leftrightarrow x \in ]a; +\infty[$$

- **Section finissante :** "jusqu'à ..."

$$x \leq a \Leftrightarrow x \in ]-\infty; a] \quad \text{et} \quad x < a \Leftrightarrow x \in ]-\infty; a[$$

- **Encadrement :** "entre ... et ..."

$$a \leq x \leq b \Leftrightarrow x \in [a; b] \quad \text{et} \quad a < x < b \Leftrightarrow x \in ]a; b[$$

$$a \leq x < b \Leftrightarrow x \in [a; b[ \quad \text{et} \quad a < x \leq b \Leftrightarrow x \in ]a; b]$$

## Résolution

On isole l'inconnue dans une inéquation du 1<sup>er</sup> degré. On obtient alors :

$$ax \leq b \quad \text{ou} \quad ax < b \quad \text{ou} \quad ax > b \quad \text{ou} \quad ax \geq b$$

- Si  $a \neq 0$ , on divise par  $a$

$a > 0$ , on ne change pas l'inégalité

$a < 0$ ,  $\triangle$  on inverse l'inégalité

On obtient une section commençante ou finissante.

- Si  $a = 0$ , on obtient  $S = \emptyset$  ou  $S = \mathbb{R}$

## Factorisation

On peut factoriser de deux façons :

- Par un facteur commun :  $ab + ac = a(b + c)$   
Problème du "1" :  $ab + a = a(b + 1)$

- Une identité remarquable :

— Une différence de deux carrés :

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

— par un carré parfait :

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

## Signe du binôme

Lorsque l'on cherche le signe de  $ax + b$  :

- On détermine la valeur frontière :  $x = -\frac{b}{a}$
- On obtient alors le tableau de signe suivant :

$x$	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	signe de $-a$		signe de $a$
$a > 0$	-	0	+
$a < 0$	+	0	-

## Inéquations du premier degré

### Inéquation produit

Lorsque l'inéquation est de degré supérieur à 1, on annule le second membre.

- On factorise le premier membre
- On détermine les valeurs frontières.
- On remplit un tableau de signes puis on résout l'inéquation à l'aide du tableau.

### Inéquation quotient

Lorsque l'inconnue apparaît au dénominateur :

- On détermine l'ensemble de définition  $D_f$ .
- On annule le second membre.  
 $\triangle$  Pas de produit en croix!!
- On réduit au même dénominateur le premier membre en factorisant si nécessaire.
- On détermine les valeurs frontières.
- On remplit un tableau de signes en mettant une double barre pour la ou les valeurs interdites puis on résout l'inéquation à l'aide du tableau.

## Fautes à éviter

- $x^2 \geq 9 \not\Rightarrow x \geq 3$  On omet le cas  $x < 0$ .

$$\frac{2x+1}{x-3} \leq 1 \not\Rightarrow 2x+1 \leq x-3$$

Pas de produit en croix, signes non constants.

- $x(1-x) < 2x \not\Rightarrow 1-x < 2$

On ne peut diviser par  $x$  : peut être nul ou négatif.

Dans les trois cas, on annule le second terme, on factorise puis l'on dresse un tableau de signes.

### Correction des fautes à éviter

•  $x^2 \geq 9 \Leftrightarrow x^2 - 9 \geq 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+3) \geq 0 \Leftrightarrow S = ]-\infty, -3] \cup [3; +\infty[$

x	$-\infty$	-3	3	$+\infty$
$x-3$	-	0	+	+
$x+3$	-	-	0	+
$(x-3)(x+3)$	-	-	+	+

•  $\frac{2x+1}{x-3} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x-3} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x+4}{x-3} \leq 0 \quad D_f = \mathbb{R} - \{3\}$

x	$-\infty$	-4	3	$+\infty$
$x+4$	-	0	+	+
$x-3$	-	-	0	+
$\frac{x+4}{x-3}$	+	+	-	+

$S = [-4; 3[$

•  $x(1-x) < 2x \Leftrightarrow x(1-x) - 2x < 0 \Leftrightarrow x(-1-x) < 0$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$x$	-	-	0	+
$-x-3$	+	+	0	-
$x(-x-1)$	+	+	-	-

$S = ]-\infty; -1[ \cup ]0; +\infty[$

### Exemples de résolution

#### • Premier degré

$$2(x-1) - 3(x+1) > 4(3x+2)$$

$$2x - 2 - 3x - 3 > 12x + 8$$

$$-13x > 13 \Leftrightarrow x < -1 \quad \text{soit } S = ]-\infty; -1[$$

#### • Inéquation produit

$$(x-5)(x-2) < (x-5)(2x-3)$$

$$(x-5)(x-2) - (x-5)(2x-3) < 0$$

$$(x-5)(x-2-2x+3) < 0$$

$$(x-5)(-x+1) < 0 \quad S = ]-\infty; 1[ \cup ]5; +\infty[$$

x	$-\infty$	1	5	$+\infty$
$x-5$	-	-	0	+
$-x+1$	+	0	-	-
$(x-5)(-x+1)$	+	+	-	-

#### • Inéquation quotient

$$\frac{4}{x+1} \leq 3 \quad D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$\frac{4}{x+1} - 3 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-3x+1}{x+1} \leq 0 \quad S = ]-\infty; -1[ \cup \left[ \frac{1}{3}; +\infty[$$

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$-3x+1$	+	+	0	-
$x+1$	-	0	+	+
$\frac{-3x+1}{x+1}$	+	+	-	-