Correction exercices : Fonctions carrée et inverse

Chapitre 5

Exercice 1

a) 16

b) 10 000

c) 0

d) $\dfrac{9}{16}$

e) 0,01

Exercice 2

a) Graphiquement la droite $y = 4$ coupe la parabole en deux points d'abscisse -2 et 2. Par le calcul, l'équation $x^2 = 4$ admet deux solutions -2 et 2

b) Graphiquement la droite $y = -1$ ne coupe pas la parabole. Par le calcul, l'équation $x^2 = -1$ n'admet pas de solution.

Exercice 3

a) ± 1

b) $\varnothing$

c) 0

d) $\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

e) ± 10

Exercice 4

a) $X \in [-0,3\,;\,0,3]$ et $Y \in [0\,;\,0,09]$

b) $X \in [100\,;\,1000]$ et $Y \in [10^4\,;\,10^6]$

Exercice 5

a) La fonction carrée est croissante sur $[0;+\infty[$. Elle conserve la relation d'ordre.

b) La fonction carrée est décroissante sur $]-\infty;0]$. Elle inverse la relation d'ordre.

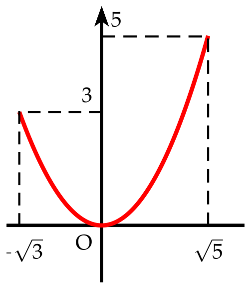
Exercice 6

La fonction carrée est croissante sur $[0;+\infty[$, donc

$$1 \leqslant x \leqslant 3 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leqslant x^2 \leqslant 9$$

Exercice 7

Mettons les axes à la figure : $\ell = \sqrt{5} + \sqrt{3}$



Exercice 8

Les point O(0 ;0) et K(1 ;1) sont sur la parabole.
Les unités sur les axes sont respectivement OI et OJ.
Dans les triangles OIA' et OAM, (AM) // (IA).
D'après le théorème de Thalès,

$$\frac{\text{AM}}{\text{IA}'} = \frac{\text{OA}}{\text{OI}} = \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \text{AM} = \frac{1}{4} \times \text{IA}' = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \text{OJ}$$

Les coordonnées de M sont $\left(\frac{1}{4}\,;\,\left[\frac{1}{4}\right]^2\right)$

On pourrait montrer que les coordonnées de N et L sont respectivement : $\left(\frac{1}{2}\,;\,\left[\frac{1}{2}\right]^2\right)$ et $\left(\frac{3}{4}\,;\,\left[\frac{3}{4}\right]^2\right)$

Les point O, M, N, L et K sont sur la parabole représentant la fonction carrée.

Exercice 9

1) $f(x) = (x-2)^2 - 3$

2) $f(x) = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{25}{4}$

3) $f(x) = (x+3)^2 + 3$

4) $f(x) = 2\left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{2}$

5) $f(x) = 3(x+2)^2$

6) $f(x) = -\left(x - \dfrac{7}{2}\right) + \dfrac{9}{4}$

Exercice 10

1) $f(x) = -2(x+3)^2 - 4$

2) On peut proposer l'algorithme suivant :

Variables
X, Y réels
Initialisation
Lire X
Traitement
$X + 3 \to Y$
$Y^2 \to Y$
$-2Y \to Y$
$Y - 4 \to Y$
Sortie
Afficher Y

3) On peut traduire la fonction par :

Choisir un nombre.
Lui soustraire 5.
Élever le résultat au carré.
Multiplier le résultat par 2.
Ajouter au résultat 6.
Afficher le résultat

Exercice 11

1) $a = 2\,;\quad \alpha = 0\,;\quad \beta = -3$

x	-2		0		2
$f(x)$	5	$\searrow$	-3	$\nearrow$	5

2) On peut faire la conjecture que la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

3) Il faut montrer que la fonction f est paire.

$$f(-x) = 2(-x)^2 - 3 = 2x^2 - 3 = f(x)$$

Exercice 12

1) $a = 3\,;\quad \alpha = 1\,;\quad \beta = -4$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

2) $a = -3\,;\quad \alpha = 1\,;\quad \beta = 4$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

3) $a = -2\,;\quad \alpha = 0\,;\quad \beta = 7$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	7	$\searrow$	$-\infty$

4) $a = 3\,;\quad \alpha = 0\,;\quad \beta = -5$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 13

1) $a = 2\,;\quad \alpha = 3\,;\quad \beta = 4$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

2) a) $f(-1) > f(2)$ car la fonction f est décroissante sur $]-\infty; 3]$.

b) $f(1) > f(4)$ car la courbe $\mathscr{C}_f$, tournée vers le haut, est symétrique par rapport à la droite $x = 3$. Comme 1 est plus loin de 3 que 4 son image est plus grande.

c) $f(20) > f(19,7)$ car la fonction f est croissante sur $[3; +\infty[$

3) $a > a - 1 \quad \Rightarrow \quad f(a) < f(a-1)$
car f est décroissante sur $]-\infty; 3]$

Exercice 14

Pour f, $a = -2$ donc $\mathscr{C}_f$ est tournée vers le bas : $\mathscr{C}_f = \mathscr{P}_3$
Pour g et h, $a = 2$ donc $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ sont tournées vers le haut. Les minimum de g et h sont respectivement -3 et 3 : $\mathscr{C}_g = \mathscr{P}_1$ et $\mathscr{C}_h = \mathscr{P}_2$

Exercice 15

a) $a_1 = -1\,;\quad \alpha_1 = -2\,;\quad \beta_1 = -3$
$\mathscr{C}_1$ est tournée vers le bas et $S_1(-2; -3)$

fenêtre $X \in [-7; 3]$ et $Y \in [-10; 0]$

b) $a_2 = 2\,;\quad \alpha_2 = \dfrac{1}{2}\,;\quad \beta_2 = \dfrac{25}{2}$

$\mathscr{C}_2$ est tournée vers le haut et $S_2\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{25}{2}\right)$

fenêtre $X \in [-4,5; 5,5]$ et $Y \in [0; 10]$

c) $a_3 = -4\,;\quad \alpha_3 = 3,5\,;\quad \beta_3 = 1,5$
$\mathscr{C}_3$ est tournée vers le bas et $S_3\,(3,5; 1,5)$

fenêtre $X \in [-8,5; 1,5]$ et $Y \in [-8,5; 1,5]$

d) $a_4 = 1\,;\quad \alpha_4 = 0\,;\quad \beta_4 = 7$
$\mathscr{C}_4$ est tournée vers le haut et $S_4\,(0; 7)$

fenêtre $X \in [-5; 5]$ et $Y \in [0; 15]$

Exercice 16

a) $S = (2; 3) \quad \Rightarrow \quad \alpha = 2$ et $\beta = 3$

$$\begin{cases} f(x) = a(x-2)^2 + 3 \\ f(0) = -1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a = -1$$

$$f(x) = -(x-2)^2 + 3$$

b) Comme la parabole est symétrique par rapport à une droite parallèle à l'axe des ordonnées : $\alpha = \dfrac{-2+1}{2} = -\dfrac{1}{2}$

$f(x) = a\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 + \beta$

$\begin{cases} f(0)=2 \\ f(1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{4}+\beta = 2 \\ \dfrac{9a}{4}+\beta = 0 \end{cases}$

Par soustraction des deux équations, on trouve $a = -1$ puis $\beta = \dfrac{9}{4}$

$f(x) = -\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{9}{4}$

c) $\alpha = 1 \Rightarrow f(x) = a(x-1)^2 + \beta$

$\begin{cases} f(0)=0 \\ f(3)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+\beta = 0 \\ 4a+\beta = 1 \end{cases}$

Par soustraction des deux équations, on trouve $a = \dfrac{1}{3}$ puis $\beta = -\dfrac{1}{3}$

$f(x) = \dfrac{1}{3}(x-1)^2 - \dfrac{1}{3}$

Exercice 17

a) On développe.

b) Le minimum de la résistance est de 200 Ω atteinte pour une température de 100 °C.

Exercice 18

a) La parabole est symétrique par rapport à la droite $y = 1$ donc $f(-3) = -2,15$

b) $\begin{cases} f(x) = a(x-1)^2 + 1,85 \\ f(5) = -2,15 \end{cases} \Rightarrow a = -0,25$

$f(x) = -0,25(x-1)^2 + 1,85$

Exercice 19

a) De la symétrie de la parabole et de la hauteur maximale, on en déduit le sommet S(75 ;50). Donc $f(x) = a(x-75)^2 + 50$

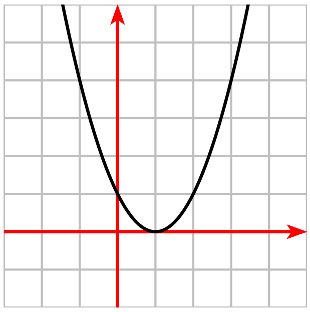
$f(0) = 0 \Rightarrow 75^2 a + 50 = 0 \Rightarrow a = -\dfrac{50}{75^2} = -\dfrac{2}{225}$

$f(x) = -\dfrac{2}{225}(x-75)^2 + 50$

b) $f(120) = 32$. La balle passe largement au dessus du filet.

Exercice 20

$f(x) = (x-1)^2$. Le sommet de la parabole est S(1 ;0). On peut ainsi placer les axes.



Exercice 21

Voir le cours

Exercice 22

a) $\dfrac{7}{5}$ c) $-\dfrac{4}{3}$ e) 10^6

b) -9 d) $\dfrac{8}{5}$ f) 10^{-5}

Exercice 23

a) La droite $y = 2$ coupe l'hyperbole en un point. $x = \dfrac{1}{2}$

b) La droite $y = -3$ coupe l'hyperbole en un point. $x = -\dfrac{1}{3}$

c) La droite $y = 0$ ne coupe pas l'hyperbole.

Exercice 24

a) $\dfrac{3}{4}$ b) 50 c) 10^5 d) 5×10^{-5}

Pour trouver les antécédents, on utilise également la fonction inverse. On dit que la fonction inverse est involutive car lorsqu'on la compose deux fois on revient au point de départ.

Exercice 25

a) fenêtre : $X \in [-1;0]$ et $Y \in [-10;0]$

b) fenêtre : $X \in [0;100]$ et $Y \in [0;0,1]$

Exercice 26

a) La fonction inverse est décroissante sur $]0;+\infty[$. Elle inverse la relation d'ordre.

b) La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty;0[$. Elle inverse la relation d'ordre.

Exercice 27

a) $\begin{cases} x < 0 \text{ toujours vérifiée} \\ x > 0 \Rightarrow x \geqslant \dfrac{4}{3} \end{cases}$

$S =]-\infty\,;0[\cup\left[\dfrac{4}{3}\,;+\infty\right[$

b) $\begin{cases} x > 0 \text{ jamais vérifiée} \\ x < 0 \Rightarrow x \geqslant -\dfrac{1}{3} \end{cases}$

$S = \left[-\dfrac{1}{3}\,;0\right[$

c) $\begin{cases} x > 0 \text{ toujours vérifiée} \\ x < 0 \Rightarrow x \leqslant -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

$S = \left]-\infty\,;-\dfrac{1}{2}\right[\cup]0\,;+\infty[$

EXERCICE 28

a) La pression est inversement proportionnelle au volume et inversement.

b) Comme la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

$$0,5 \leqslant V \leqslant 5 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{5} \leqslant P \leqslant 2$$

EXERCICE 29

1) Comme le muret et le mur sont verticaux, les triangles PAN et PBM sont dans une configuration de Thalès.

$$\frac{\text{AP}}{\text{PB}} = \frac{\text{AN}}{\text{BM}} \Leftrightarrow \frac{\text{AP}}{\text{AP}+3} = \frac{2}{\text{BM}} \Leftrightarrow$$

$$\text{AP}\times\text{BM} = 2\text{AP}+6 \Leftrightarrow \text{BM} = 2+\frac{6}{\text{AP}}$$

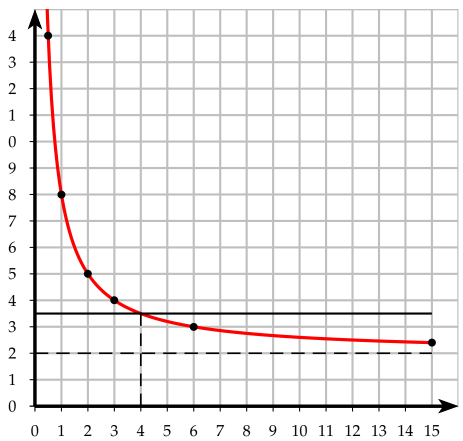
2) a) $a = 6\,;\quad \alpha = 0\,;\quad \beta = 2$

x	0	$+\infty$
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘ 2

b)

x	0,5	1	2	3	6	15
$f(x)$	14	8	5	4	3	2,4

c) On a la représentation suivante :



3) Le projecteur doit se situer à moins de 4 m du muret.

EXERCICE 30

- Le graphique A a comme asymptote horizontale $y = -3$. Il représente une fonction décroissante donc la fonction f_3
- Le graphique B a comme asymptote horizontale $y = 2$. Il représente une fonction décroissante donc la fonction f_1
- Le graphique C a comme asymptote horizontale $y = 2$. Il représente une fonction croissante donc la fonction f_2
- Le graphique D a comme asymptote horizontale $y = -3$. Il représente une fonction croissante donc la fonction f_4

EXERCICE 31

1) $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$

2) $f(x) = \dfrac{1}{x}+3$

3) $f(x) = \dfrac{1}{x-5}+1$

EXERCICE 32

$f(x) = \dfrac{1}{4(x-3)}$ et $g(x) = \dfrac{1}{5x}+5$

EXERCICE 33

Variables
X, Y réels
Initialisation
Lire X
Traitement
$X+3 \to Y$
$8Y \to Y$
$\dfrac{1}{Y} \to Y$
Sortie
Afficher Y

Variables
X, Y réels
Initialisation
Lire X
Traitement
$7X \to Y$
$Y+1 \to Y$
$\dfrac{1}{Y} \to Y$
$Y+3 \to Y$
Sortie
Afficher Y

EXERCICE 34

1) $x \xrightarrow[\text{l'inverse}]{\text{on prend}} \dfrac{1}{x} \xrightarrow[\text{par 3}]{\text{on multiplie}} \dfrac{3}{x} \xrightarrow[5]{\text{on ajoute}} 5+\dfrac{3}{x}$

$x \xrightarrow[\text{par 2}]{\text{on multiplie}} 2x \xrightarrow[1]{\text{on ajoute}} 2x+1 \xrightarrow[\text{l'inverse}]{\text{on prend}} \dfrac{1}{2x+1}$

2) On a :

$$\begin{aligned} -3 &\leqslant x \leqslant -1 \\ -1 &\leqslant \frac{1}{x} \leqslant -\frac{1}{3} \\ -3 &\leqslant \frac{3}{x} \leqslant -1 \\ 2 &\leqslant A \leqslant 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -3 &\leqslant x \leqslant -1 \\ -1 &\leqslant \frac{1}{x} \leqslant -\frac{1}{3} \\ \frac{7}{3} &\leqslant -\frac{7}{x} \leqslant 7 \\ \frac{13}{2} &\leqslant B \leqslant 9 \end{aligned}$$

Exercice 35

$5 \leqslant x \leqslant 10$

$2 \leqslant x - 3 \leqslant 7$

$\dfrac{1}{7} \leqslant \dfrac{1}{x-3} \leqslant \dfrac{1}{2}$

$\dfrac{5}{7} \leqslant M \leqslant \dfrac{5}{2}$

$5 \leqslant x \leqslant 10$

$\dfrac{1}{10} \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{5}$

$-\dfrac{7}{5} \leqslant -\dfrac{7}{x} \leqslant -\dfrac{7}{10}$

$\dfrac{3}{5} \leqslant N \leqslant \dfrac{13}{10}$

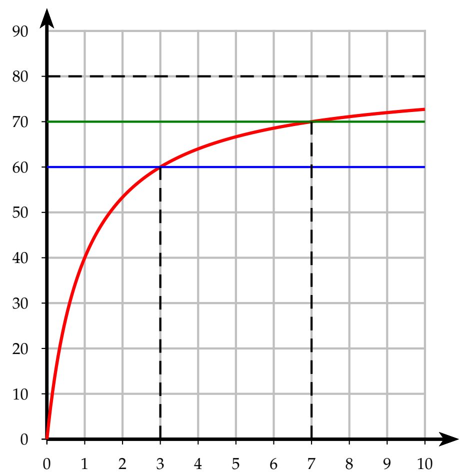
Exercice 36

Partie A

1) $p(4) = 64$ donc 36 % des personnes ignorent le nom du produit après 4 semaines de publicité.
2) a) $p(0) = 0$ donc avant la campagne personne ne connaissait ses céréales.

   b) $p(15) = 75$ donc seulement $3/4$ des personnes connaissent ses céréales après 15 semaines de campagne.

Partie B



1) A partir de 3 semaines de campagne au moins 60 % des personnes connaissent ses céréales.
2) Il faut quatre semaines supplémentaires pour avoir au moins 70 % des personnes.
3) Vrai car à partir de $x = 3$ la courbe progresse de moins en moins. En effet pour avoir 10 % supplémentaires de personnes connaissant ce produit après 3 semaines, il faut ajouter 4 semaines. De plus même avec une campagne très longue, il restera 20 % de personnes ignorant ce produit.

Exercice 37

1) On a le tableau suivant :

A	B	Q	X_1	X_2	X_3	X_4	R
10	96	5	25	121	11	6	6
8	2 009	4	16	2025	45	41	41

2) On obtient bien 6 en rentrant 10 et 8 puis 41 en rentrant 8 et 2 009

3) a) $x^2 + 10x = 96 \Leftrightarrow (x+5)^2 - 25 = 96 \Leftrightarrow (x+5)^2 = 121$

   $x^2 + 8x = 2009 \Leftrightarrow (x+4)^2 - 16 = 2009 \Leftrightarrow (x+4)^2 = 2025$

   b) 121 et 2 025 sont respectivement les carrés de 11 et 45. On a alors

   $$(x+5)^2 = 121 \Leftrightarrow x+5 = \pm 11 \Leftrightarrow x = 6 \text{ ou } x = -16$$

   $$(x+4)^2 = 2\,025 \Leftrightarrow x+4 = \pm 45 \Leftrightarrow x = 41 \text{ ou } x = -49$$

   c) Cet algorithme calcule la solution positive de l'équation : $x^2 + \mathrm{A}x = \mathrm{B}$

   d) On trouve la solution positive de l'équation $x^2 - 84x = 3\,565$ en rentrant : $\mathrm{A} = -84$ et $\mathrm{B} = 3\,565$. On trouve alors : $x = 115$