Correction exercices : Géométrie euclidienne et les configurations

Chapitre 6

Exercice 1

Voir cours

Exercice 2

- Dans le triangle ABD, (MP) // (AB) et $\mathrm{P} = m[\mathrm{BD}]$, d'après le théorème des milieux, $\mathrm{MP} = \dfrac{1}{2}\mathrm{AB}$.
- Dans le triangle BDC, $\mathrm{P} = m[\mathrm{BD}]$ et $\mathrm{N} = m[\mathrm{BC}]$, d'après la réciproque du le théorème des milieux, $\mathrm{PN} = \dfrac{1}{2}\mathrm{BC}$.
- $\mathrm{MN} = \mathrm{MP} + \mathrm{PN} = \dfrac{1}{2}(\mathrm{AB} + \mathrm{DC})$

Exercice 3

Voir cours

Exercice 4

1) ABCD est un parallélogramme donc $\mathrm{O} = m[\mathrm{AC}]$ et $\mathrm{C} = m[\mathrm{AI}]$, on a donc :
$\mathrm{OI} = \mathrm{OC} + \mathrm{CI} = \mathrm{OC} + 2\mathrm{OC} = 3\mathrm{OC}$
donc $\mathrm{OC} = \dfrac{1}{3}\mathrm{OI}$
C est alors le centre de gravité du triangle BDI.
2) Comme C est le centre de gravité du triangle BDI, (BC) est la médiane issue de B du triangle BDI. (BC) coupe donc [DI] en son milieu.

Exercice 5

Dans les 4 exercices, (MN) // (AB), les triangles OAB et OMN sont donc dans une configuration de Thalès.

1) Voir cours
2) $\dfrac{\mathrm{OM}}{\mathrm{OA}} = \dfrac{\mathrm{MN}}{\mathrm{AB}} \Leftrightarrow \dfrac{4-x}{x} = \dfrac{x}{6}$
On trouve $x = 2,4$
3) Thalès dans OAI et OMJ : $\dfrac{\mathrm{OJ}}{\mathrm{OI}} = \dfrac{\mathrm{MJ}}{\mathrm{AI}}$ (1)
Thalès dans OIB et OJN : $\dfrac{\mathrm{OJ}}{\mathrm{OI}} = \dfrac{\mathrm{JN}}{\mathrm{IB}}$ (2)
de (1) et (2) : $\dfrac{\mathrm{MJ}}{\mathrm{AI}} = \dfrac{\mathrm{JN}}{\mathrm{IB}} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} = \dfrac{2,4}{3}$
On trouve alors $x = 1,25$
4) Même procédé que dans le 3).
$\dfrac{\mathrm{NJ}}{\mathrm{BI}} = \dfrac{\mathrm{OM}}{\mathrm{OA}} \Leftrightarrow \dfrac{1}{1,4} = \dfrac{x}{x+1,6}$
On trouve : $x = 4$

Exercice 6

1) Voir cours
2) $\dfrac{\mathrm{OD}}{\mathrm{OB}} = \dfrac{6,5}{9,1} = \dfrac{5}{7}$
$\dfrac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OA}} = \dfrac{5}{7}$ donc $\dfrac{\mathrm{OD}}{\mathrm{OB}} = \dfrac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OA}} = \dfrac{5}{7}$
D'après la réciproque du théorème de Thalès (DC) // (AB) donc le quadrilatère ABCD est un trapèze.

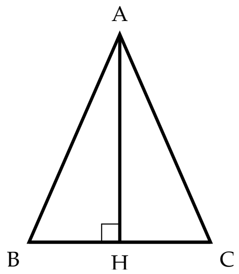
Exercice 7

- Les triangles BMC et BNC sont respectivement inscrit dans le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [BC], les triangles sont donc respectivement rectangle en M et N.
- Les droites (BN) et (CM) sont donc respectivement les hauteurs du triangle ABC respectivement issues de B et C. Le point I est alors l'orthocentre du triangle ABC.
- La droite (AI) est donc la hauteur issue de A du triangle ABC : $(\mathrm{AI}) \perp \mathrm{BC}$

Application : On trace un cercle en un point O quelconque de d et de rayon inférieur à OA. Ce cercle coupe d en deux points B et C. Ce cercle coupe alors [BA] et [CA] respectivement en M et N. Les droites (BN) et (CM) se coupe en I. La droite (AI) est alors la perpendiculaire à d passant par A.

Exercice 8

a) Comme ABC est isocèle en A, la hauteur issue de A est aussi la médiatrice de [BC]. H est alors le milieu de [BC].
Dans ABH rectangle en H



D'après le théorème de Pythagore :
$\mathrm{AH}^2 = \mathrm{AB}^2 - \mathrm{BH}^2 = 25 - 4 = 21$, $\mathrm{AH} = \sqrt{21}$

b) Pour que ABCD soit un losange, les diagonales [AC] et [BD] doivent être perpendiculaires donc ODC rectangle en O.

$\mathrm{DC}^2 = 80$ et $\mathrm{OD}^2 + \mathrm{OC}^2 = 64 + 16 = 80$

$\mathrm{DC}^2 = \mathrm{OD}^2 + \mathrm{OC}^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ODC est rectangle en O

Exercice 9

1) a) $\mathrm{AC} = 6 \tan 20 \simeq 2,18$

$\mathrm{BC} = \dfrac{6}{\cos 20} \simeq 6,39$

b) $\mathrm{AB} = 8 \sin 70 \simeq 7,52$

$\mathrm{AC} = 8 \cos 70 \simeq 2,74$

c) $\mathrm{AB} = \dfrac{3}{\tan 25} \simeq 6,43$

$\mathrm{BC} = \dfrac{3}{\sin 25} \simeq 7,10$

2) a) $\widehat{\mathrm{B}} = \sin^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right) = 30°$

$\widehat{\mathrm{C}} = \cos^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right) = 60°$

b) $\widehat{\mathrm{B}} = \tan^{-1}\left(\dfrac{3}{5}\right) \simeq 31°$

$\widehat{\mathrm{C}} = \tan^{-1}\left(\dfrac{5}{3}\right) \simeq 59°$

c) $\widehat{\mathrm{B}} = \sin^{-1}\left(\dfrac{3}{7}\right) \simeq 25°$

$\widehat{\mathrm{C}} = \cos^{-1}\left(\dfrac{3}{7}\right) \simeq 65°$

Exercice 10

a) Dans AHC rectangle en H

$\tan 50 = \dfrac{\mathrm{HC}}{\mathrm{AH}} \Rightarrow \mathrm{HC} = 10 \tan 50$

b) Dans AHB rectangle en H

$\tan 20 = \dfrac{\mathrm{HB}}{\mathrm{AH}} \Rightarrow \mathrm{HB} = 10 \tan 20$

$\mathrm{BC} = \mathrm{HC} - \mathrm{HB} = 10(\tan 50 - \tan 20)$

c) $\mathrm{BC} \simeq 8,28$

Exercice 11

a) Dans ABH rectangle en H

$\cos 20 = \dfrac{\mathrm{AH}}{\mathrm{AB}} \Rightarrow \mathrm{AH} = 4 \cos 20$

b) Dans AHC rectangle en H

$\tan 40 = \dfrac{\mathrm{HC}}{\mathrm{AH}} \Rightarrow \mathrm{HC} = \mathrm{AH} \tan 40$

donc $\mathrm{HC} = 4 \cos 20 \tan 40$

c) $\mathrm{HC} \simeq 3,15$

Exercice 12

a) Comme le triangle rectangle ABH est rectangle en H et possède un angle de 45°, ABH est isocèle en H. On a alors :

$\mathrm{AH} = 3$ et $\mathrm{AB} = 3\sqrt{2}$

Dans le triangle AHC rectangle en H :

$\mathrm{AC} = \dfrac{3}{\cos 60} = 6$ et $\mathrm{HC} = 3 \tan 60 = 3\sqrt{3}$

b) $$\begin{aligned} \text{périmètre} &= 3\sqrt{2} + 6 + 3\sqrt{3} + 3 \\ &= 9 + 3\sqrt{2} + 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

Exercice 13

a) Dans ABC rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore :

$\mathrm{BC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 = 100 \Rightarrow \mathrm{BC} = 10$

b) Dans ABH rectangle en H : $\cos \widehat{\mathrm{B}} = \dfrac{\mathrm{BH}}{\mathrm{AB}}$

Dans ABC rectangle en A : $\cos \widehat{\mathrm{B}} = \dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}}$

Donc $\dfrac{\mathrm{BH}}{\mathrm{AB}} = \dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}} \Leftrightarrow \mathrm{AB}^2 = \mathrm{BC} \times \mathrm{BH}$

c) $\mathrm{BH} = \dfrac{\mathrm{AB}^2}{\mathrm{BC}} = 6,4$ et $\mathrm{HC} = \mathrm{BC} - \mathrm{BH} = 3,6$

Exercice 14

a) AIB est équilatéral donc AI = AB

ABCD est un carré donc AB = AD

Des deux égalités, on en déduit : AI = AD

DAI est donc isocèle en A

AIB est équilatéral donc $\widehat{\mathrm{IAD}} = 30$

DAI isocèle donc $\widehat{\mathrm{ADI}} = 75$

Par complémentarité $\widehat{\mathrm{HDI}} = 15$

b) La hauteur d'un triangle équilatéral de côté 1 vaut $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

donc $\mathrm{IH} = \mathrm{HK} - \mathrm{IK} = 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\tan 15 = \dfrac{\mathrm{IH}}{\mathrm{DH}}$ or $\mathrm{DH} = \dfrac{1}{2}$ donc

$\tan 15 = 2\mathrm{IH} = 2 - \sqrt{3}$

Exercice 15

a) ABH rectangle en H : $\mathrm{BH} = \dfrac{\mathrm{AH}}{\tan 60} = \dfrac{h\sqrt{3}}{3}$

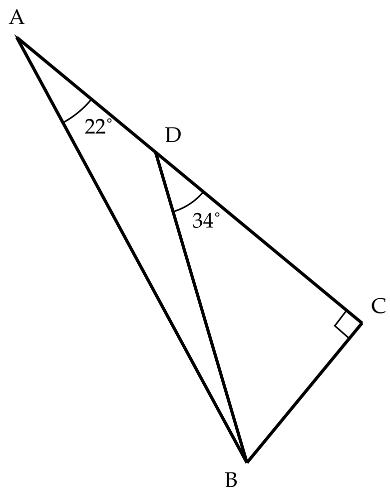
AHC rectangle en H : HC = AH = h

b) De $\mathrm{BH} + \mathrm{HC} = 8 \;\Rightarrow\; h\left(1 + \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = 8$

$$h = \frac{24}{3+\sqrt{3}} = \frac{24(3-\sqrt{3})}{6} = 4(3-\sqrt{3})$$

EXERCICE 16

On a la figure suivante :



On a $\mathrm{AD} = 1$ Calculons BC.

Dans ABC : $\tan 22 = \dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}} \;\Rightarrow\; \mathrm{AC} = \dfrac{\mathrm{BC}}{\tan 22}$

Dans DBC : $\tan 34 = \dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{DC}} \;\Rightarrow\; \mathrm{DC} = \dfrac{\mathrm{BC}}{\tan 34}$

$\mathrm{AD} = \mathrm{AC} - \mathrm{DC} \;\Leftrightarrow\; \mathrm{BC}\left(\dfrac{1}{\tan 22} - \dfrac{1}{\tan 34}\right) = 1$

d'où $\mathrm{BC} = \dfrac{\tan 22 \times \tan 34}{\tan 34 - \tan 22} \simeq 1,0075$

On peut donc confirmer l'affirmation.

EXERCICE 17

En procédant de façon identique à l'exercice précédent, on trouve :

$$\mathrm{SC} = \mathrm{AB} \times \frac{\tan\beta \times \tan\alpha}{\tan\alpha - \tan\beta} \simeq 23,36 \text{ m}$$

EXERCICE 18

1) a) Par supplémentarité : $\widehat{\mathrm{ABC}} = 130$
$\widehat{\mathrm{BAC}} = 180 - 130 - 25 = 25 = \widehat{\mathrm{ACB}}$
le triangle ABC est donc isocèle en B

b) Donc $\mathrm{BC} = \mathrm{AB} = 4$
Dans AHB rectangle en H :
$\mathrm{AH} = \mathrm{AB}\sin 50 = 3,06$

2) Les angles $\widehat{\mathrm{ABD}}$ et $\widehat{\mathrm{ACD}}$ interceptent le même arc donc $\widehat{\mathrm{ABD}} = \widehat{\mathrm{ACD}} = 20$

Donc $\widehat{\mathrm{AIB}} = 180 - \widehat{\mathrm{IAB}} - \widehat{\mathrm{ABD}} = 105$