Correction exercices

Chapitre 7

Exercice 1
Voir cours

Exercice 2
Voir cours

Exercice 3

$\vec{u} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CC} = \vec{0}$

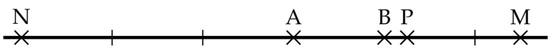
Exercice 4
Voir cours

Exercice 5
Voir cours

Exercice 6
Voir cours

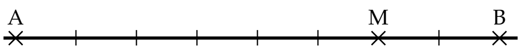
Exercice 7
Voir cours

Exercice 8



Exercice 9

$\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$



Exercice 10

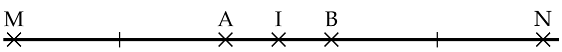
1) $\overrightarrow{AM} = -2\overrightarrow{AB}$

2) $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AB}$

3) $\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AM} = -\frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$

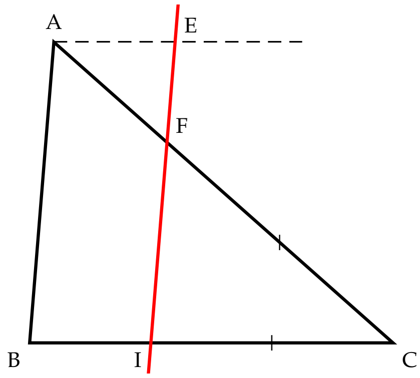
$\overrightarrow{IN} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AN} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$

On a : $\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{IN}$, donc $I = m[MN]$



Exercice 11

1) On a la figure suivante :



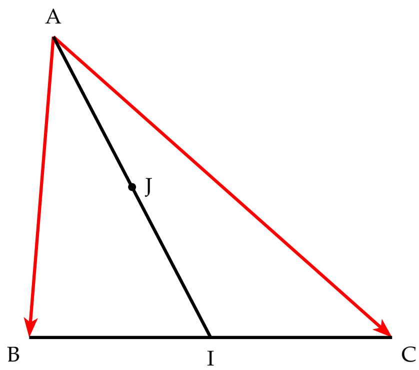
2) $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BI}$ donc AEIB parallélogramme donc $\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{IF} = \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$

3) $\overrightarrow{IF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{IE}$ donc $\overrightarrow{IF}$ et $\overrightarrow{IE}$ sont colinéaires et donc les points I, E et F sont alignés.

Exercice 12
Voir cours

Exercice 13



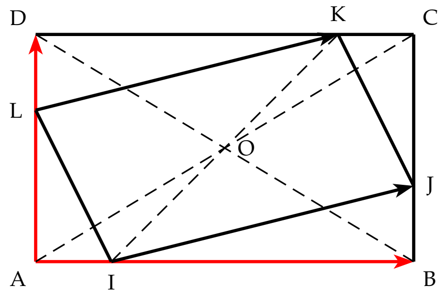
1) $I\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ et $J\left(\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)$

2) $\vec{u} = 2\left(-\frac{1}{4};-\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{3}{4};-\frac{1}{4}\right) + 2\left(-\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right)$

$\vec{u} = \left(-\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right)$

Exercice 14

a) On a la figure suivante :



b) $\overrightarrow{IJ} = \left(\dfrac{4}{5};\dfrac{1}{3}\right)$ et $\overrightarrow{LK} = \left(\dfrac{4}{5};\dfrac{1}{3}\right)$

c) $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$ donc IJKL parallélogramme.

d) I faut montrer que : O = m[IK]

$$m[\text{IK}] = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}+\frac{1}{5};1\right) = \left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right) = \text{O}$$

Exercice 15

Voir cours

Exercice 16

a) $\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} = -\dfrac{2}{3} - 3 = -\dfrac{11}{3}$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

b) $\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{6}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{5} \end{vmatrix} = \dfrac{2}{5} - \dfrac{2}{5} = 0$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Exercice 17

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires $\Leftrightarrow$ $\det(\vec{u},\vec{v}) = 0$

a) $\begin{vmatrix} 2 & m \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 6 - 6m = 0 \quad\Leftrightarrow\quad m = 1$

b) $\begin{vmatrix} -m & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 3m = 0 \quad\Leftrightarrow\quad m = 0$

c) $\begin{vmatrix} 27 & 2m \\ 2m & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 81 - 4m^2 = 0 \quad\Leftrightarrow$

$4m^2 = 81 \quad\Leftrightarrow\quad m = \pm\dfrac{9}{2}$

Exercice 18

1) $\overrightarrow{AB} = (3;4)$ et $\overrightarrow{AC}(-8;-11)$

$\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = -1 \neq 0$

Les points A, B et C ne sont pas alignés.

2) $\overrightarrow{AB} = (3;3)$ et $\overrightarrow{CD} = (8;8)$

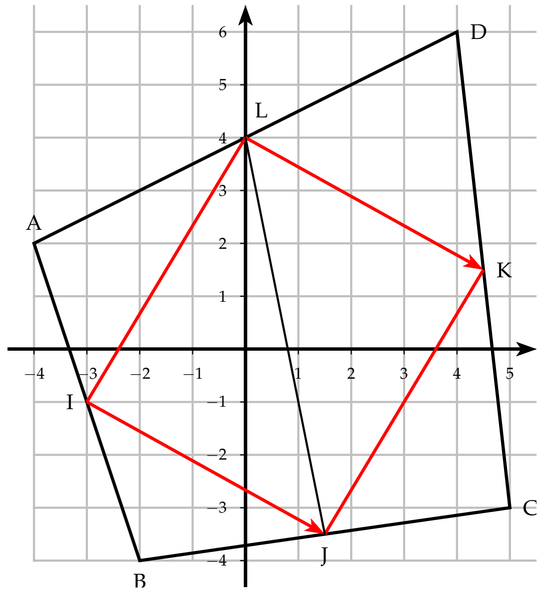
$\overrightarrow{CD} = \dfrac{8}{3}\overrightarrow{AB}$

Les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Exercice 19

Voir le cours

Exercice 20



1) voir figure

2) I$(-3;-1)$, J$(1,5;-3,5)$, K$(4,5;1,5)$ et L$(0;4)$

3) $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK} = (4,5;-2,5)$

IJKL est un parallélogramme.

4) $\text{IJ}^2 = 4,5^2 + (-2,5)^2 = 26,5$

$\overrightarrow{IL} = (3;5) \quad\Rightarrow\quad \text{IL}^2 = 3^2 + 5^2 = 34$

$\overrightarrow{JL} = (-1,5;4,5) \quad\Rightarrow$

$\text{JL}^2 = (-1,5)^2 + 7,5^2 = 58,5$

$\text{IJ}^2 + \text{IL}^2 \neq \text{JL}^2$ d'après la contraposée du théorème de Pythagore le triangles IJL n'est pas rectangle en I. IJKL n'est donc pas un rectangle.

Exercice 21

1) a) On pose I = m[AC] et J = m[BD]

$\text{I} = \dfrac{1}{2}(8-4;5-1) = (2;2)$

$\text{J} = \dfrac{1}{2}(4+0;6-2) = (2;2)$

Donc I =J

b) $\text{AB}^2 = (4+4)^2 + (-2+1)^2 = 65$

$\text{BC}^2 = (8-4)^2 + (5+2)^2 = 65$

2) I = J et AB = BC donc ABCD est un losange.

Exercice 22

Voir le cours

Exercice 23

1) $IA^2 = (5-2)^2 + (3+1)^2 = 25$
$IB^2 = (-3-2)^2 + (-2+1)^2 = 26$
$IC^2 = (4-2)^2 + (3{,}5+1)^2 = 24{,}25$
$ID^2 = (3-2)^2 + (-1+2\sqrt{6}+1)^2 = 25$

2) IA = ID = 5
A et D sont sur le cercle $\mathscr{C}$
$IB \neq 5$ et $IC \neq 5$
donc B et C ne sont pas sur le cercle $\mathscr{C}$

Exercice 24

a) On pose $A(x;y)$
$\begin{pmatrix} x-2 \\ y-3 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2+1 = 3 \\ y = 3+3 = 6 \end{cases}$

On pose $B(x;y)$
$\begin{pmatrix} x \\ y+3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -3+6 = 6 \end{cases}$

b) $\overrightarrow{PA}\,(12\,;\,6)$ et $\overrightarrow{PB}\,(6\,;\,3)$

c) On a : $\overrightarrow{PA} = 2\overrightarrow{PB}$ les vecteurs $\overrightarrow{PA}$ et $\overrightarrow{PB}$ sont colinéaires donc les points P, A et B sont alignés. (on a même B milieu de [AP])

Exercice 25

1) On pose $G(x;y)$

$$\begin{pmatrix} 1-x \\ -1-y \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -1-x \\ -2-y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2-x \\ 2-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

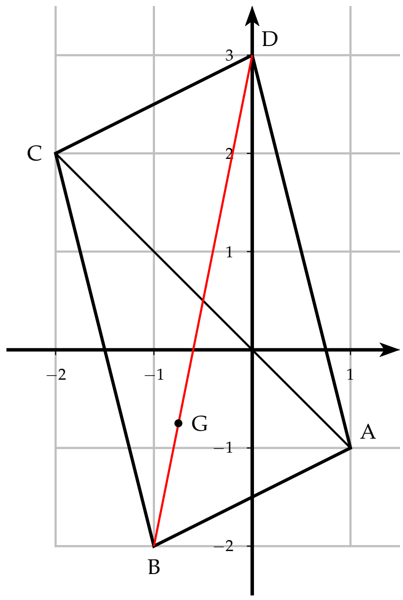
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x = -3 \\ 4y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{3}{4} \\ y = -\dfrac{3}{4} \end{cases}$$

2) On pose $D(x;y)$

$$\begin{pmatrix} x+1 \\ y+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = -1+1 = 0 \\ y = -2+5 = 3 \end{cases}$$

3) Les points B, G et D semblent alignés.
$\overrightarrow{BG}\left(\dfrac{1}{4}\,;\,\dfrac{5}{4}\right)$ et $\overrightarrow{BD}\,(1\,;\,5)$
On a : $\overrightarrow{BD} = 4\overrightarrow{BG}$ les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BG}$ sont colinéaires et donc les points B,G et D sont alignés.



Exercice 26

a) $I = m[AB] = \dfrac{1}{2}(-1+7\,;\,2-8) = (3\,;\,-3)$

$IA^2 = (-1-3)^2 + (2+3)^2 = 16+25 = 41$
$IE^2 = (7-3)^2 + (2+3)^2 = 16+25 = 41$

On a donc IA = IE le point E est donc sur le cercle de diamètre [AB].

b) Si $F(x,y)$ est le symétrique de E par rapport à I, alors
$\overrightarrow{IF} = \overrightarrow{EI} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 = -4 \\ y+3 = -5 \end{cases}$
donc $F(-1\,;\,-8)$

c) F et E appartiennent tous deux au cercle $\mathscr{C}$ donc les diagonales de AEBF sont de même longueur et se coupent en leur milieu. AEBF est donc un rectangle.