Contrôle de mathématiques

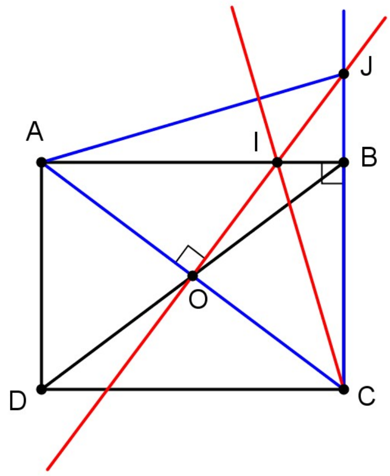
Correction du lundi 28 mars 2011

Exercice 1

Orthocentre (3 points)

1) L'orthocentre est l'intersection des hauteurs d'un triangle.

2) a) On obtient la figure suivante :



b) On sait que $ABCD$ est un rectangle donc $(AB) \perp (BC)$ et donc $(AB) \perp (CJ)$ donc (AB) est la hauteur de ACJ issue de A

On sait que O est le centre du rectangle $ABCD$, donc O est le milieu de (AC). De plus (OJ) est la médiatrice de $[AC]$ donc $(OJ) \perp (AC)$. On en déduit que (OJ) est la hauteur de ACJ issue de J.

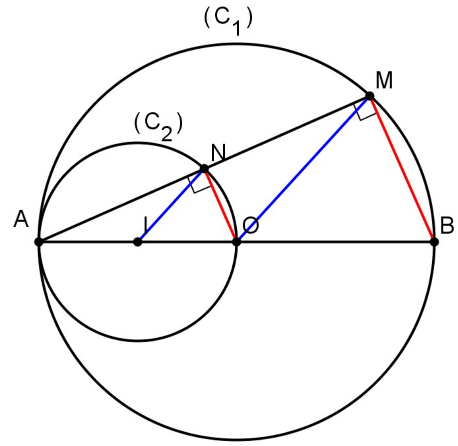
Comme I est sur (AB) et sur (OJ), I est l'orthocentre du triangle ACJ. (CJ) qui est la troisième hauteur est donc perpendiculaire à (AJ).

Exercice 2

Cercles et triangles (4 points)

a) Un triangle ABC inscrit dans un cercle de de diamètre $[AB]$ est rectangle en A.

b) a) On obtient la figure suivante :



b) On sait que les triangles ABM et AON sont inscrits respectivement dans les cercles de diamètres $[AB]$ et $[AO]$. Les triangles ABM et AON sont donc respectivement rectangles en M et N.

Comme O et N sont respectivement sur $[AB]$ et sur $[AM]$, on en déduit que : $(ON) \perp (AM)$ et $(BM) \perp (AM)$ donc $(ON)//(BM)$

c) Dans un triangle la droite qui passe par le milieu d'un côté, parallèlement à un second, passe par le troisième en son milieu (Théorème des milieux).

Dans le triangle ABM, on sait que O est le milieu de $[AB]$ et $(ON)//(BM)$ donc, d'après le théorème des milieux, N est le milieu de $[AM]$.

d) Dans un triangle la droite qui passe par le milieu de deux côtés est parallèle au troisième (réciproque du théorème des milieux).

Dans le triangle AOM, on sait que $I = m[AO]$ et $N = m[AM]$ donc, d'après la réciproque du théorème des milieux, (IN) est parallèle à (OM).

Exercice 3

Théorème de Thalès (3 points)

1) Soit deux droites (AB) et $(A'B'$ sécante en O. Si les droites AA' et BB' sont parallèles alors, on a les égalités suivantes :

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'} = \frac{AA'}{BB'}$$

2) Les droites (AC) et (BD) sont sécante en O. Comme les droites (AB) et (CD) sont parallèles, d'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} \quad \Leftrightarrow \quad OB = \frac{OA \times OD}{OC} = \frac{4 \times 8,4}{6} = 5,6$$

3) Calculons les rapports suivants :

$$\frac{OC}{OE} = \frac{6}{9,3} = \frac{60}{93} = \frac{20}{31} \qquad \text{et} \qquad \frac{OD}{OF} = \frac{8,4}{13} = \frac{84}{130} = \frac{42}{65}$$

Les rapports n'étant pas égaux, d'après la réciproque du théorème de Thalès les droites (DC) et (EF) ne sont pas parallèles.

Exercice 4

Théorème de Pythagore (4 points)

1) Dans le triangle ABH rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = 100 - 36 = 64$$

Dans le triangle AHC rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$HC^2 = AC^2 - AH^2 = 121 - 64 = 57$$

On en déduit alors :

$$BC = BH + HC = 6 + \sqrt{57}$$

2) $ABCD$ est un carré de côté 2. Comme I est le milieu de $[AB]$, on en déduit que $AI = IB = 1$. Comme J est tel que $BJ = \frac{1}{4}BC = \frac{1}{2}$, on en déduit que $CJ = \frac{3}{2}$.

Les triangles AID, IBJ et DJC sont respectivement rectangles en I, B et C, d'après le théorème de Pythagore :

$$DI^2 = AD^2 + AI^2 = 4 + 1 = 5$$
$$IJ^2 = IB^2 + BJ^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$
$$DJ^2 = CJ^2 + DC^2 = \frac{9}{4} + 4 = \frac{25}{4}$$

On en déduit alors :

$$DI^2 + IJ^2 = 5 + \frac{5}{4} = \frac{25}{4} = DJ^2$$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, on en déduit que le triangle DIJ est rectangle en I.

Exercice 5

Trigonométrie (4 points)

1) On a :

$$\tan 35° = \frac{AC}{AB} \quad \text{donc} \quad AC = AB \tan 35° = 6 \tan 35° \simeq 4,2$$
$$\cos 35° = \frac{AB}{BC} \quad \text{donc} \quad BC = \frac{AB}{\cos 35°} = \frac{6}{\cos 35°} \simeq 7,3$$

2) On a :

$$\cos 25° = \frac{DE}{EF} \quad \text{donc} \quad DE = EF \cos 25° = 9 \cos 25° \simeq 8,2$$
$$\sin 25° = \frac{DF}{EF} \quad \text{donc} \quad DF = EF \sin 25° = 9 \sin 25° \simeq 3,8$$

3) On a :

$$\cos \widehat{GHI} = \frac{GH}{IH} = \frac{3,5}{5} = 0,7 \quad \text{donc} \quad \widehat{GHI} = \cos^{-1} 0,7 \simeq 46°$$

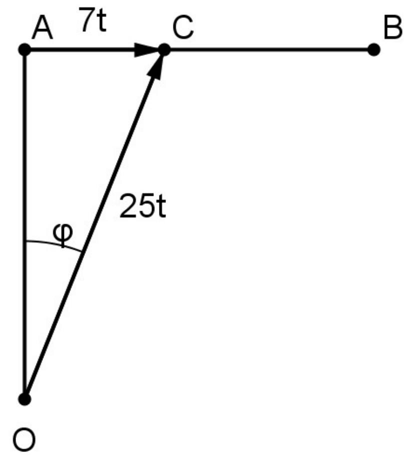
On en déduit alors :

$$\widehat{HIG} = 90 - \cos^{-1} 0,7 \simeq 44°$$

Exercice 6

Jeu vidéo (2 points)

On a la figure suivante :



Soit C le point où se trouve le canard au moment de l'impact, soit après un temps en seconde t après l'apparition du canard.

Comme le canard se déplace sur AB à la vitesse de 7 cm/s, au temps t, on a :

$$AC = 7 \times t$$

Comme la balle se déplace à la vitesse de 25 cm/s, au temps t, on a :

$$OC = 25 \times t$$

On a alors :

$$\sin\varphi = \frac{AC}{OC} = \frac{7t}{25t} = 0,28$$

On en déduit alors : $\varphi = \sin^{-1} 0,28 \simeq 16°$