Contrôle de mathématiques

Correction du lundi 23 mai 2011

Exercice 1

Équations de droites. (1,5 point)

On donne les points suivants : $A(0;2)$, $B(5;7)$, $C(-3;7)$, $D(9;3)$

1) Les droites (AB) et(CD) sont sécantes si et seulement si le déterminant de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ n'est pas nul.

   On calcule les coordonnées de : $\overrightarrow{AB}(5;5)$ et $\overrightarrow{CD}(12;-4)$

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \begin{vmatrix} 5 & 12 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -20 - 60 = -80$$

   Le déterminant n'est pas nul donc les droites (AB) et (CD) sont sécantes.

2) Les équations réduites des droites (AB) et (CD) sont de la forme : $y = ax + b$

   Pour la droite (AB)

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5}{5} = 1$$
$$b = y_A - ax_A = 2 - 1 \times 0 = 2$$

   La droite (AB) a pour équation $y = x + 2$

   Pour la droite (CD)

$$a = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{-4}{12} = -\frac{1}{3}$$
$$b = y_C - ax_C = 7 - \left(-\frac{1}{3}\right) \times (-3) = 6$$

   La droite (CD) a pour équation $y = -\frac{1}{3}x + 6$

3) Soit $I(x_I; y_I)$ le point d'intersection de (AB) et $CD)$, on a les relations :

$$\begin{cases} y_I = x_I + 2 \\ y_I = -\dfrac{1}{3}x_I + 6 \end{cases}$$

   On a alors (en multipliant par 3) :

$$\begin{aligned} 3x_I + 6 &= -x_I + 18 \\ 4x_I &= 12 \\ x_I &= 3 \end{aligned}$$

   On en déduit alors : $y_I = x_I + 2 = 5$ d'où $I(3;5)$

Exercice 2

Résolutions de systèmes. (8 points)

1) $\begin{cases} 3x - 7y = -9 & (\times -5) \\ 5x + 2y = 26 & (\times 3) \end{cases}$

Le système devient :

$$\begin{array}{r} -15x + 35y = 45 \\ 15x + 6y = 78 \\ \hline 0x + 41y = 123 \\ y = \dfrac{123}{41} = 3 \end{array}$$

On remplace $y = 3$ dans la 1re équation

$$\begin{aligned} 3x - 7 \times 3 &= -9 \\ 3x - 21 &= -9 \\ 3x &= 12 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

$S\ \{(4; 3)\}$

2) $\begin{cases} 6x - y = -17 & (\times 5) \\ -x + 5y = 27 & (\times 1) \end{cases}$

Le système devient :

$$\begin{array}{r} 30x - 5y = -85 \\ -x + 5y = 27 \\ \hline 29x + 0y = -58 \\ x = \dfrac{-58}{29} = -2 \end{array}$$

On remplace $x = -2$ dans la 1re équation

$$\begin{aligned} 6 \times (-2) - y &= -17 \\ -12 - y &= -17 \\ y &= 17 - 12 \\ y &= 5 \end{aligned}$$

$S\ \{(-2; 5)\}$

3) $\begin{cases} \dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{5}y = \dfrac{2}{3} & (\times 15) \\ \dfrac{5}{2}x + 3y = 4 & (\times -4) \end{cases}$

Le système devient :

$$\begin{array}{r} 10x + 3y = 10 \\ -10x - 12y = -16 \\ \hline 0x - 9y = -6 \\ y = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3} \end{array}$$

On remplace $y = \dfrac{2}{3}$ dans la 1re équation multipliée par 15

$$\begin{aligned} 10x + 3 \times \frac{2}{3} &= 10 \\ 10x + 2 &= 10 \\ 10x &= 8 \\ x &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

$$S \left\{ \left(\frac{4}{5}; \frac{2}{3} \right) \right\}$$

4) $\begin{cases} 2x - 3y = -7 & (\times 2) & (\times -2) \\ -4x - 6y = 3 & (\times 1) & (\times 1) \end{cases}$

Le système devient

$$\begin{array}{r} 4x - 6y = -14 \\ -4x - 6y = 3 \\ \hline 0x - 12y = -11 \\ y = \dfrac{11}{12} \end{array} \qquad \begin{array}{r} -4x + 6y = 14 \\ -4x - 6y = 3 \\ \hline -8x + 0y = 17 \\ x = -\dfrac{17}{8} \end{array}$$

$$S\left\{\left(-\frac{17}{8}; \frac{11}{12}\right)\right\}$$

5) $\begin{cases} x + y = 33 \\ x^2 - y^2 = 165 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 33 \\ (x+y)(x-y) = 165 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 33 \\ x - y = \dfrac{165}{33} = 5 \end{cases}$

Par somme et différence, on trouve : $x = 19$ et $y = 14$

$$S\,\{(19; 14)\}$$

Exercice 3

Nombres de solutions d'un système. 1,5 points

Soit le système (S) suivant : $\begin{cases} 10x + 35y = 15 \\ 14x + 49y = 21 \end{cases}$

$\delta = \begin{vmatrix} 10 & 35 \\ 14 & 49 \end{vmatrix} = 10 \times 49 - 35 \times 14 = 490 - 490 = 0$

Comme le déterminant est nul, les droites associées aux équations sont parallèles. Pour savoir si elles sont strictement parallèles ou confondues, on calcule :

$$\frac{a}{a'} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7} \quad \text{et} \quad \frac{c}{c'} = \frac{15}{21} = \frac{5}{7} \quad \text{donc} \quad \frac{a}{a'} = \frac{c}{c'}$$

Les rapports sont égaux donc les droites sont confondues et donc le système admet une droite solution d'équation : $2x + 7y - 3 = 0$ (1re équation simplifiée)

Exercice 4

Changement de variables (3points)

1) Résolvez le système (S_1) : $\begin{cases} 3x - 4y = 10 & (\times 1) \\ -x + 5y = -7 & (\times 3) \end{cases}$

Le système devient :

$$\begin{array}{r} 3x - 4y = 10 \\ -3x + 15y = -21 \\ \hline 0x + 11y = -11 \\ y = -\dfrac{11}{11} = -1 \end{array}$$

On remplace $y = 3$ dans la 2e équation

$$\begin{aligned} -x + 5 \times (-1) &= -7 \\ -x - 5 &= -7 \\ x &= 7 - 5 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

$$S\,\{(2; -1)\}$$

2) On pose $a^2 = x$ $(a \geqslant 0)$ et $\dfrac{1}{b+1} = y$. Ce deuxième système revient alors au précédent. On a alors :

On a : $a^2 = 2$ et : $\dfrac{1}{b-1} = -1$

donc $a = \sqrt{2}$ ou $a = -\sqrt{2}$ donc $-b-1 = 1$ donc $b = -2$

On a alors 2 couples solution : $S = \left\{(-\sqrt{2}; -2); (\sqrt{2}; -2)\right\}$

Exercice 5

Problèmes. (6points)

1) Déterminer deux nombres entiers naturels connaissant leur somme, 154, et leur quotient, $\dfrac{8}{3}$.

   On appelle x et y avec $x > y$ les deux nombres entiers. On a alors :

   $$\begin{cases} x + y = 154 \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{8}{3} \end{cases}$$

   De la 2^e équation, on a : $3x = 8y$.

   On remplace dans la 1^{re} équation multipliée par 3, on a :

   $$\begin{aligned} 3x + 3y &= 462 \\ 8y + 3y &= 462 \\ 11y &= 462 \\ y &= 42 \end{aligned}$$

   On en déduit alors : $x = \dfrac{8}{3} \times 42 = 112$

   Les deux nombres cherchés sont donc 112 et 42

2) Une chaloupe à moteur met 3 heures pour remonter une rivière sur une distance de 45 km et 1 heure et 48 minutes pour redescendre cette rivière sur la même distance.
   On appellera V_1 la vitesse de la chaloupe et V_2 la vitesse du courant de la rivière.

   a) Montrer que 1 h 48′ $= 1 + \dfrac{48}{60} = 1 + \dfrac{8}{10} = 1,8$ h

   b) On sait que : $t = \dfrac{\text{distance}}{\text{vitesse}}$

      Quand la chaloupe remonte la rivière, sa vitesse par rapport à la rive est de $V_1 - V_2$, quand elle l'a redescend sa vitesse est de $V_1 + V_2$ par rapport à la rive. On a donc :

      $$\begin{cases} \dfrac{45}{V_1 - V_2} = 3 \\ \dfrac{45}{V_1 + V_2} = 1,8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} V_1 - V_2 = \dfrac{45}{3} = 15 \\ V_1 + V_2 = \dfrac{45}{1,8} = 25 \end{cases}$$

      Par somme et différence, on trouve : $V_1 = 20$ km/h et $V_2 = 5$ km/h.

      La vitesse de la chaloupe est de 20 km/h et du courant 5 km/h.

3) Un rectangle de longueur L et de largeur ℓ (exprimées en m) est tel que, si on diminue de 80 m sa longueur et si on augmente de 40 m sa largeur, il devient un carré.

Si on diminue sa longueur de 60 m et si on augmente sa largeur de 20 m, son aire diminue de 400 m^2.

Déterminer les dimensions de ce rectangle.

Si le rectangle devient un carré, on doit avoir :

$$L - 80 = \ell + 40 \quad \text{soit} \quad L - \ell = 120$$

Si l'aire diminue de 400 m^2, on a :

$$\begin{aligned}(L-60)(\ell+20) &= L\ell - 400\\ L\ell + 20L - 60\ell + 1200 &= L\ell - 400\\ 20L - 60\ell &= 800\\ L - 3\ell &= 40\end{aligned}$$

On obtient alors le système suivant : $\begin{cases} L - \ell = 120 \\ L - 3\ell = 40 \end{cases}$

Par différence, on a : $2\ell = 80$ soit $\ell = 40$

On en déduit alors : $L = 120 + \ell = 120 + 40 = 160$

Les dimensions du rectangle sont : $160 \text{ m} \times 40 \text{ m}$