Correction du contrôle

du jeudi 12 avril 2012

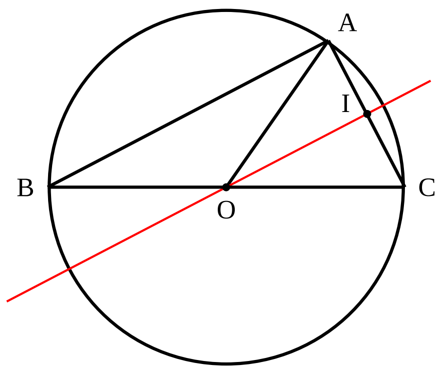
Exercice 1

ROC **(5 points)**

1) Dans un triangle, la droite qui passe par le milieu de deux côtés est parallèle au troisième.

$$\text{Si} \quad I = m[AB] \quad \text{et si} \quad J = m[AC] \quad \text{alors} \quad (IJ)//(BC) \quad \text{et} \quad IJ = \frac{1}{2}BC$$

2) Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre O. Le triangle ABC est inscrit dans le cercle $\mathscr{C}$ et $[BC]$ est un diamètre. On appelle I le milieu de $[AC]$. On a alors la figure suivante :



Comme O est le centre du cercle circonscrit ($OA = OC$) et I milieu de $[AC]$, alors la droite (OI) est la médiatrice de $[AC]$.

Comme O et I sont les milieux respectifs de $[BC]$ et $[AC]$, d'après la réciproque du théorème des milieux, la droite (OI) est parallèle à (AB).

(OI) est la médiatrice de $[AC]$, donc $(AC) \perp (OI)$ et $(OI)//(AB)$, on en déduit que $(AC) \perp (AB)$. Le triangle ABC est rectangle en A.

3) a) Le cercle est de diamètre [BC] donc le triangle DBC est rectangle en D. On a donc : $\widehat{\text{EDC}} = 90 - 70 = 20^\circ$

b) L'angle $\widehat{\text{EAC}}$ est l'angle au centre de l'angle inscrit $\widehat{\text{EDC}}$ donc : $\widehat{\text{EAC}} = 2 \times \widehat{\text{EDC}} = 40^\circ$

c) AC et AE sont deux rayon du cercle, donc le triangle AEC est isocèle en A, donc $\widehat{\text{ACE}} = \widehat{\text{AEC}}$. Par complément à 180°, on a :

$$\widehat{\text{AEC}} = \frac{180 - 40}{2} = 70^\circ.$$

Autre méthode : $\widehat{\text{EDB}}$ et $\widehat{\text{ECB}}$ sont deux angles inscrits qui interceptent le même arc, donc : $\widehat{\text{EDB}} = \widehat{\text{ECB}} = 70^\circ$.

Comme le triangle AEC est isocèle, $\widehat{\text{AEC}} = 70^\circ$.

Exercice 2

Théorèmes de Thalès et de Pythagore **(8 points)**

1) Les droites (AE) et (BD) sont parallèles car toutes deux perpendiculaires à la droite (AC). D'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{CB}{CA} = \frac{BD}{AE} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{250}{350} = \frac{150}{AE}$$

On a donc : $AE = \dfrac{150 \times 350}{250} = 210$

2) Les point A, B, C et A, D, E sont alignés dans cet ordre. On calcule les rapports suivant :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{6}{9,3} = \frac{20}{31} \quad \text{et} \quad \frac{AD}{AE} = \frac{8,4}{13} = \frac{42}{65}$$

Donc $\dfrac{AB}{AC} \neq \dfrac{AD}{AE}$, d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (BD) et (CE) ne sont pas parallèles et donc le quadrilatère BCED n'est pas un trapèze

3) Dans le triangle ABH rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = 81 - 9 = 72$$

Donc $AH = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$

Dans le triangle AHC rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$AC^2 = AH^2 + HC^2 = 72 + (10-3)^2 = 121$$

Donc $AC = \sqrt{121} = 11$

4) On calcule la longueur de chaque côté du triangle FEC, inscrit dans un rectangle, par le théorème de Pythagore :

$$EF^2 = AF^2 + AE^2 = 2,5^2 + (8-6)^2 = 10,25$$
$$EC^2 = ED^2 + DC^2 = 6^2 + 5^2 = 61$$
$$FC^2 = FB^2 + BC^2 = 2,5^2 + 8^2 = 70,25$$

Le plus grand côté et FC et

$$EF^2 + EC^2 = 10,25 + 61 = 71,25$$

On a donc $FC^2 \neq EF^2 + EC^2$ d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle FEC n'est pas rectangle.

Exercice 3

Trigonométrie **(4 points)**

1) Dans le triangle ABC rectangle en A, on a :

$$\tan 24^\circ = \frac{AB}{AC} \qquad \cos 24^\circ = \frac{AC}{BC}$$

$$AB = AC \tan 24^\circ \qquad BC = \frac{AC}{\cos 24^\circ}$$

$$AB = 5 \tan 24^\circ \qquad BC = \frac{5}{\cos 24^\circ}$$

$$AB \simeq 2,23 \qquad BC \simeq 5,47$$

2) Dans le triangle DEF rectangle en D, on a :

$$\sin \widehat{DFE} = \frac{DE}{FE} = \frac{3,5}{4,2} = \frac{5}{6}$$

On a donc : $\quad \mathrm{DFE} = \arcsin \frac{5}{6} \simeq 56^\circ$.

3) Le triangle BCD rectangle ne C et possède un angle de 45°, donc BCD est isocèle rectangle en C. on a donc : $x = y$
Dans le triangle ACD rectangle en C, on a

$$\tan 30^\circ = \frac{y}{x+6} = \frac{x}{x+6} \quad \text{et} \quad \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

On a donc :

$$\frac{x}{x+6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 3x = \sqrt{3}(x+6) \quad \Leftrightarrow \quad x\sqrt{3} = x + 6$$

On a alors :

$$x = y = \frac{6}{\sqrt{3}-1} = \frac{6(\sqrt{3}+1)}{2} = 3(\sqrt{3}+1) \simeq 8,2 \text{ mm}$$

Exercice 4

Repérage radar **(3 points)**

Il faut donc calculer x_A, y_A, x_B et y_B. On a :

$\cos 30^\circ = \frac{x_A}{300}$	$\sin 30^\circ = \frac{y_A}{300}$	$\cos 60^\circ = \frac{x_B}{200}$	$\sin 60^\circ = \frac{y_B}{200}$
$x_A = 300 \cos 30^\circ$	$y_A = 300 \sin 30^\circ$	$x_B = 200 \cos 60^\circ$	$y_B = 200 \sin 60^\circ$
$x_A = 300 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$	$y_A = 300 \times \frac{1}{2}$	$x_B = 200 \times \frac{1}{2}$	$y_B = 200 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$
$x_A = 150\sqrt{3}$	$y_A = 150$	$x_B = 100$	$y_B = 100\sqrt{3}$

On a donc : $\;A(150\sqrt{3}; 150)\;$ et $\;B(100; 100\sqrt{3})$

$$AB = \sqrt{(150\sqrt{3} - 100)^2 + (150 - 100\sqrt{3})^2} \simeq 161 \text{ km}$$

La vitesse est donc de : $v \simeq \frac{161}{0,25} \simeq 644$ km/h $\quad$ (15 mn = 0,25 h)