Correction contrôle de mathématiques

Du mercredi 20 mai 2015

Exercice 1

Hexagone **(2,5 points)**

1) $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}$

2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

3) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{FO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{FA}$

4) $\overrightarrow{EO} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{EO} + \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{EA}$

5) $\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DC}$

Exercice 2

En vrac **(5,5 points)**

1) a) ABCD est un parallélogramme de centre O, donc ses diagonales se coupent en leur milieu. On a alors : $\overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{OB}$ donc :

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \vec{0}$$

b) On introduit le point O, centre du parallélogramme :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{DM} &= (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM}) + (\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OM}) + (\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OM}) + (\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OM})\\ &= 4\overrightarrow{OM} - (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})\end{aligned}$$

Comme d'après 1) a) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$, on a alors :

$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{DM} = 4\overrightarrow{OM}$$

2) Avant de placer M et N, on exprime $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$

a) $3\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{BM} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AM} + 2(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}) = \vec{0} \Leftrightarrow$

$3\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AM} = \vec{0} \Leftrightarrow 5\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{AB}$

b) $2\overrightarrow{AN} - 3\overrightarrow{BN} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AN} - 3(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN}) = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow$

$2\overrightarrow{AN} - 3\overrightarrow{BA} - 3\overrightarrow{AN} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow -\overrightarrow{AN} = -3\overrightarrow{AB} + \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow$

$-\overrightarrow{AN} = -\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

3) Pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires, il faut que leur déterminant soit nul.

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} m & 4 \\ m+1 & m+1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m(m+1) - 4(m+1) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

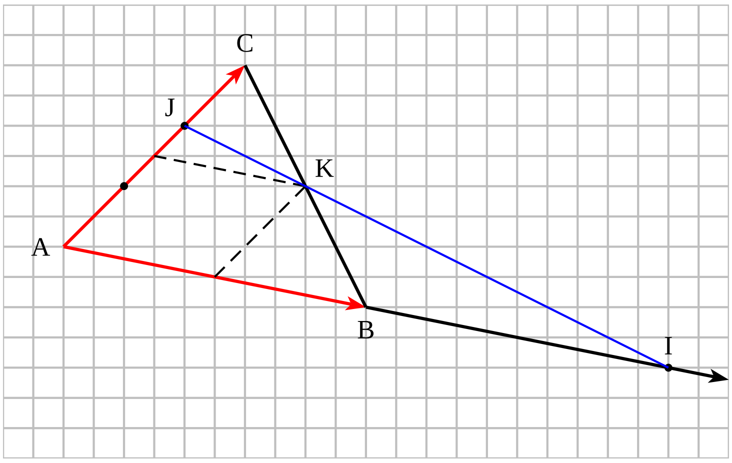
$$(m+1)(m-4) = 0 \quad \Leftrightarrow m+1 = 0 \ \text{ ou } \ m-4 = 0 \quad \Leftrightarrow m = -1 \ \text{ ou } \ m = 4$$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ssi $\;m = -1\;$ ou $\;m = 4$

Exercice 3

Coordonnées dans un repère quelconque **(3 points)**

1) On obtient la figure suivante :



2) Les coordonnées des points I, J et K dans le repère $(A\,;\ \overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC})$ sont :

$$I(2\,;\ 0)\ ,\ J\left(0\,;\ \frac{2}{3}\right) \quad \text{et} \quad K\left(\frac{1}{2}\,;\ \frac{1}{2}\right)$$

3) Les points I, J et K sont alignés ssi les vecteurs $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont colinéaires.

$$\overrightarrow{IK} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - 2 \\ \frac{1}{2} - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{IJ} = \begin{pmatrix} 0-2 \\ \frac{2}{3} - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\det(\overrightarrow{IK}, \overrightarrow{IJ}) = \begin{vmatrix} -\frac{3}{2} & -2 \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = -\frac{3}{2} \times \frac{2}{3} - (-2) \times \frac{1}{2} = -1 + 1 = 0$$

Les points I, K et J sont alignés.

Exercice 4

Quadrilatère et alignement **(5 points)**

1) a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4-(-7) \\ 1-(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 6-10 \\ -4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \end{pmatrix}$.

b) $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 6 & -8 \end{vmatrix} = -24 + 24 = 0$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, les droites (AB) et (CD) sont alors parallèles et donc ABCD est un trapèze.

2) Soient I le milieu de [CD] et M le point tel que $\overrightarrow{DM} = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{DB}$.

a) $I = \left(\dfrac{10+6}{2} \,;\, \dfrac{4-4}{2}\right) = (8 \,;\, 0)$

b) $\overrightarrow{DM} = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{DB} \Leftrightarrow \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OM} = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{DB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OD} + \dfrac{2}{5}\overrightarrow{DB}$

$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} + \dfrac{2}{5}\begin{pmatrix} -4-6 \\ 1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-4 \\ -4+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

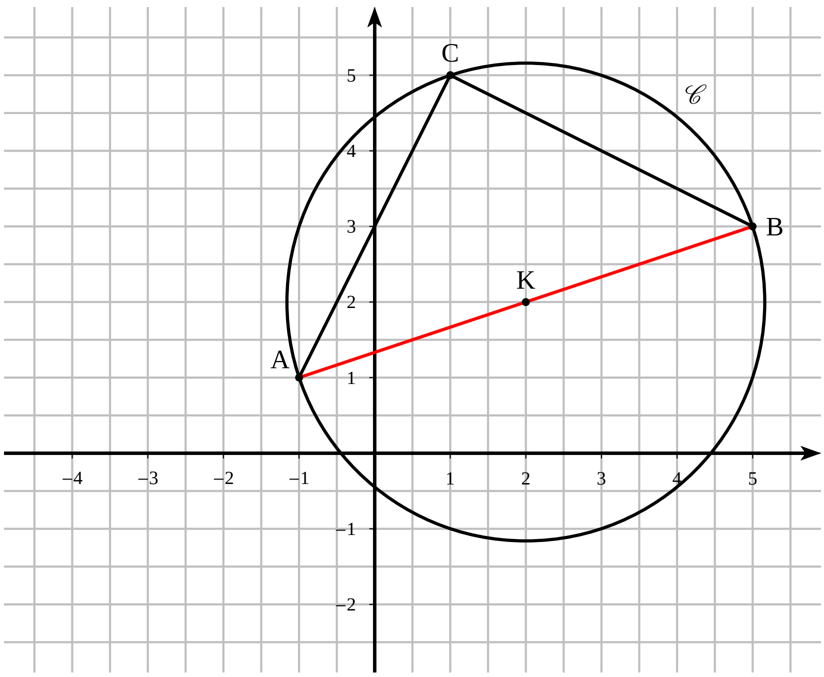
c) $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 2-(-7) \\ -2-(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AI} = \begin{pmatrix} 8-(-7) \\ 0-(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\det(\overrightarrow{AM}), \overrightarrow{AI} = \begin{vmatrix} 9 & 15 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 45 - 45 = 0$ les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires et donc les points A, M et I sont alignés.

Exercice 5

Triangle et cercle **(4 points)**

1) On obtient la figure suivante :



2) $K = \left(\dfrac{-1+5}{2} \,;\, \dfrac{1+3}{2}\right) = (2 \,;\, 2)$

3) $KC = \sqrt{(1-2)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

$KA = \sqrt{(2-(-1))^2 + (2-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

donc $KC = KA$ donc C appartient au cercle $\mathscr{C}$

4) $CA = \sqrt{(-1-1)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$
$CB = \sqrt{(5-1)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$
$AB = \sqrt{(5-(-1))^2 + (3-1)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

donc $CA = CB$ et $CA^2 + CB^2 = 20 + 20 = 40 = AB^2$ donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est isocèle rectangle en C.