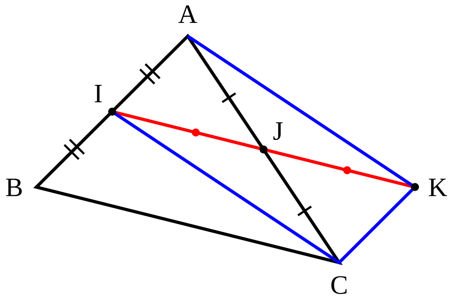
Correction contrôle de mathématiques

Du mercredi 08 avril 2015

EXERCICE 1

Théorème des milieux **(5 points)**



1) On peut tracer le segment [CK]
   - J = m[AC] = m[IK]
     donc les diagonales de AICK se coupent en leur milieu donc AICK est un parallélogramme.
     donc AI = CK et (AI)//(CK)
   - I = m[AB] donc AI = IB et (AI)//(IB)
     donc IB = CK et (IB)//(CK)
     donc IBCK est un parallélogramme.
   - On a donc IK = BC et (IK)//(BC) comme J = m[IK] IJ = $\frac{1}{2}$BC et (IJ)//(BC)
2) ABCD est un parallélogramme donc (AB)//(DC) donc (AE)//(DF)
   Comme A = m[DD'], d'après le théorème des milieux dans le triangle DFD',
   on a AE = $\frac{1}{2}$DF
   Comme ABCD est un parallélogramme et AE = $\frac{1}{3}$AB on a DF = $\frac{2}{3}$AB = $\frac{2}{3}$CD
   Donc CF = CD − DF = CD − $\frac{2}{3}$CD = $\frac{1}{3}$CD

EXERCICE 2

Longueur d'un lac **(2 points)**

Comme la maison et la falaise sont parfaitement verticales (DE)//(BC), d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} \Leftrightarrow \frac{18}{18+x} = \frac{3}{400} \Leftrightarrow 3(18+x) = 18 \times 400 \Leftrightarrow 18 + x = 2400 \Leftrightarrow$$

$$x = 2400 - 18 = 2382$$

Laurence devra nager 2 382 m. Il faut donc qu'elle soit une bonne nageuse.

EXERCICE 3

Théorème de Thalès **(4 points)**

ABC est une triangle tel que AB = 6 cm, AC = 8 cm et BC = 9 cm. M est un point de [BC]. Les parallèles à (AB) et (AC) menées par M coupent respectivement (AB) et (AC) en P. On se propose de construire la figure exacte lorsque MPAN est un losange.

1) a) On a (MN)//(AC) donc d'après le théorème de Thalès dans ABC :

$$\frac{BM}{BC} = \frac{MN}{AC} \Leftrightarrow \frac{x}{9} = \frac{MN}{8} \Leftrightarrow 9MN = 8x \Leftrightarrow MN = \frac{8}{9}x$$

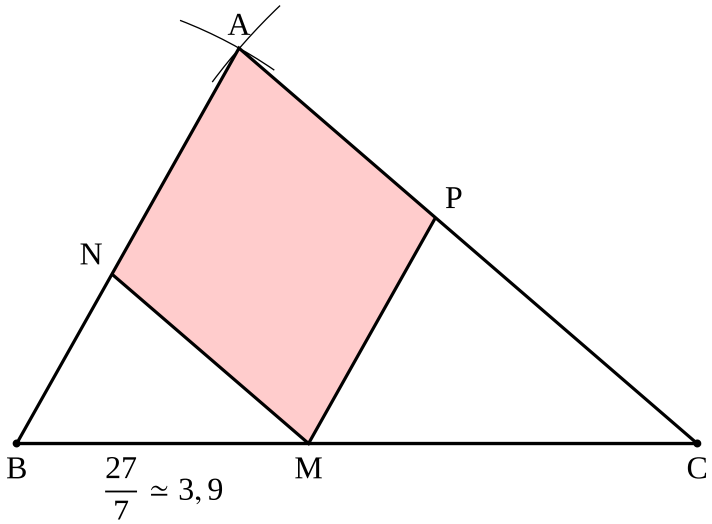
On a (MP)//(AB) donc d'après le théorème de Thalès dans ABC :

$$\frac{CM}{CB} = \frac{MP}{AB} \Leftrightarrow \frac{9-x}{9} = \frac{MP}{6} \Leftrightarrow 9MP = 54 - 6x \Leftrightarrow MP = 6 - \frac{2}{3}x$$

b) $MN = MP \Leftrightarrow \frac{8}{9}x = 6 - \frac{2}{3}x \Leftrightarrow 8x = 54 - 6x \Leftrightarrow 14x = 54 \Leftrightarrow x = \frac{27}{7}$

$x \simeq 3,9$

2) On a alors la figure suivante :



Exercice 4

Trigonométrie **(5 points)**

1) a) Dans ADC rectangle en D : $\tan x = \frac{AD}{DC} = \frac{5}{6} \Leftrightarrow x = \arctan\left(\frac{5}{6}\right) \simeq 40^\circ$

b) Dans ABC rectangle en A : $\tan y = \frac{AB}{AD} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow y = \arctan\left(\frac{3}{5}\right) \simeq 31^\circ$

c) $z = 180 - x - (90 - y) = 81^\circ$

2) a) Le triangle ABD est inscrit dans le cercle de diamètre [AB], donc ABD est rectangle en D.

b) (AD) est la bissectrice de l'angle $\widehat{CAB}$ donc $\widehat{DAC} = \frac{1}{2}\widehat{CAB} = 25^\circ$

Dans le triangle ADB rectangle en D :

$\cos 25^\circ = \frac{AD}{AB} \Leftrightarrow AD = AB\cos 25^\circ = 10\cos 25^\circ \simeq 9,1$

Exercice 5

Vrai-Faux **(4 points)**

1) ABC est rectangle en A $\Leftrightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$

Vérifions cette égalité :

- Dans AHB rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore :
  $AB^2 = BH^2 + HA^2 = 4^2 + 5^2 = 16 + 25 = 41$

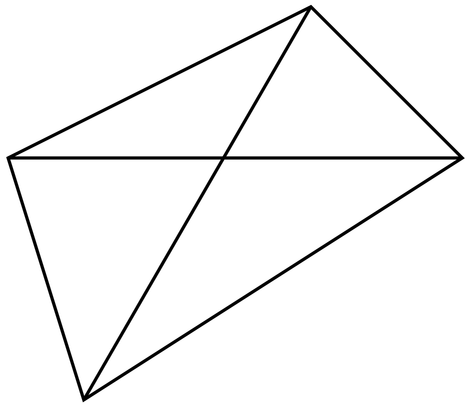
- Dans AHC rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore :
  $AC^2 = CH^2 + HA^2 = 6^2 + 5^2 = 36 + 25 = 61$

$AB^2 + AC^2 = 41 + 61 = 102$ et $BC^2 = 10^2 = 100$ donc $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$

L'affirmation est fausse

2) Un quadrilatère dont les diagonales sont de même longueur n'est pas nécessairement un rectangle parce que ce n'est pas nécessairement un parallélogramme. Il faut rajouter une hypothèse pour qu'il le soit : les diagonales doivent en plus se couper en leur milieu. Pour s'en rendre compte, voici la figure suivante d'un quadrilatère dont les diagonales sont de même longueur et qui n'est pas un parallélogramme.

   Un rectangle est un parallélogramme qui a ses diagonales de même longueur.



   L'affirmation est fausse

3) Si [AB] et [CD] sont deux diamètres quelconques d'un cercle $\mathscr{C}$ de centre O, alors les diagonales de ACBD se coupent en leur milieu O, donc ACBD est un parallélogramme. De plus les diagonales sont de même longueur, le parallélogramme est même un rectangle.

   L'affirmation est vraie