

# Géométrie dans l'espace

## I- Généralités

La géométrie élémentaire de l'espace est née du souci d'étudier les propriétés de l'espace dans lequel nous vivons. Les objets élémentaires de cette géométrie sont les points, les droites et les plans. On considère ces notions comme des notions premières, c'est-à-dire suffisamment familières pour ne pas les définir. Pour leur étude il sera nécessaire d'admettre un certain nombre de propriétés de base.

Un plan est un ensemble de points. La feuille de papier est une bonne représentation d'un plan. Lorsque l'on veut représenter plusieurs plans de l'espace, on représente chacun d'entre eux par un parallélogramme, censé représenter un rectangle en "perspective". Il ne s'agit là que d'une représentation de l'objet théorique "plan" qui n'a pas d'épaisseur et illimité dans tous les sens.



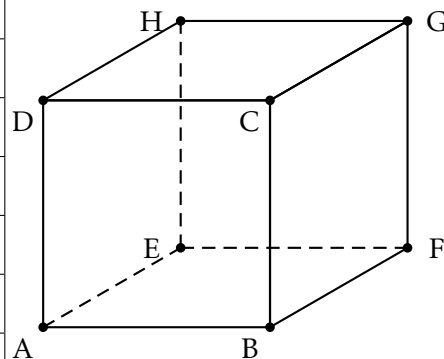
Les résultats de géométrie du plan sont applicables dans chaque plan de l'espace.

## II- Perspective cavalière

### Exemple 1:

ABCDEFGH est un cube de côté 3cm. I est le centre de la face DCGH.

Dans la réalité	Sur le dessin
L'arête [EH] est	L'arête [EH] est
I est	I est
[HC] et [EB] sont	[HC] et [EB] sont
D, I et G sont	D, I et G sont
[AB] et [BC] mesurent	[AB] et [BC] mesurent
[AB] et [BF] sont	[AB] et [BF]
[BF] mesure	[BF]



### Propriété (Règles de la perspective cavalière):

- Les éléments visibles sont dessinés ; les autres sont dessinés
- Dans un plan vu de face une figure est
- Si deux droites sont parallèles dans la réalité alors elles sont représentées sur le dessin par
- Si des points sont alignés dans la réalité alors ils sont représentés sur le dessin par
- Les proportions sont

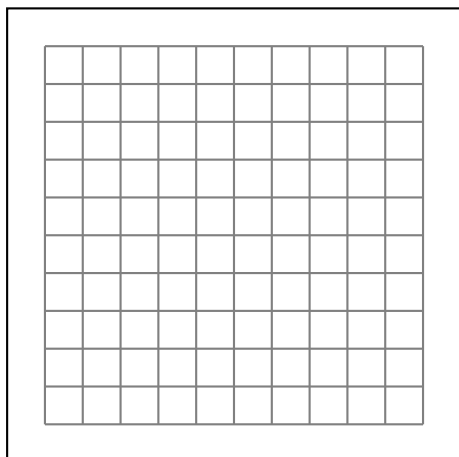
### Remarque:

On peut rajouter d'autres conventions de dessin.

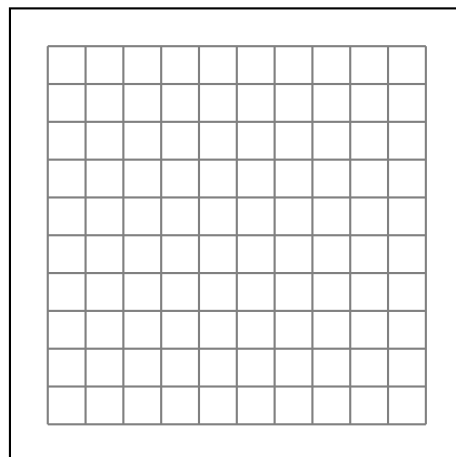
### Exemple 2:

Construire un cube ABCDEFGH de 3 cm de côté dans les deux cas suivants :

- en multipliant les longueurs des arêtes perpendiculaires au plan de face par 0,7 et avec un angle de  $45^\circ$



- en multipliant les longueurs des arêtes perpendiculaires au plan de face par 0,5 et avec un angle de  $30^\circ$



### III- Axiomes d'incidence

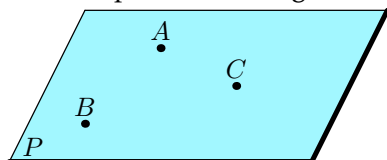
Les axiomes d'incidence de la géométrie dans l'espace sont des axiomes qui fournissent des relations entre les points, les droites et les plans de cette géométrie.

#### Propriété:

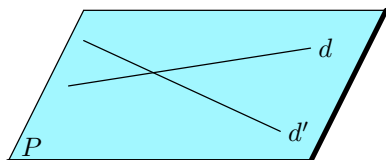
- Par deux points distincts A et B de l'espace passe
- Par trois points non alignés, A, B et C passe
- Si A et B sont deux points d'un plan P, tous les points de la droite (AB)
- Dans un plan de l'espace, on peut appliquer les propriétés de la géométrie plane.

Il en résulte qu'un plan peut être déterminé par l'une des conditions suivantes :

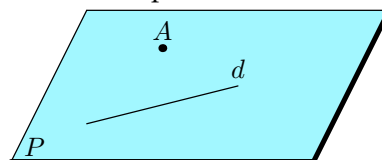
trois points non alignés



deux droites sécantes



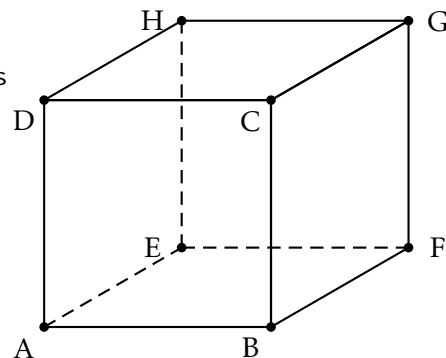
une droite et un point extérieur à celle-ci



### Exemple 3:

ABCDEFGH est un cube de côté 5. Placer les points I et J milieux respectifs de [AH] et [AF].

- 1) Donner d'autres noms du plan (HID) :
- 2) Calculer AH.

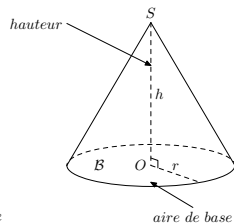
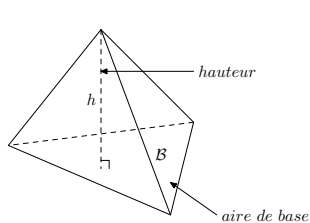


3) Quelle est la nature du triangle AFH ? Justifier.

4) Démontrer que (IJ) est parallèle à (HF). Calculer IJ.

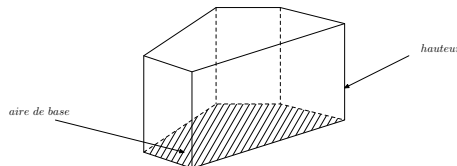
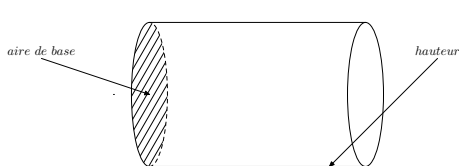
## IV- Calculs de volumes

1) Volume d'une pyramide, d'un cône



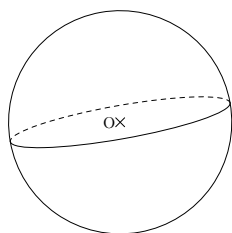
$\mathcal{V} =$

2) Volume d'un prisme, d'un cylindre



$\mathcal{V} =$

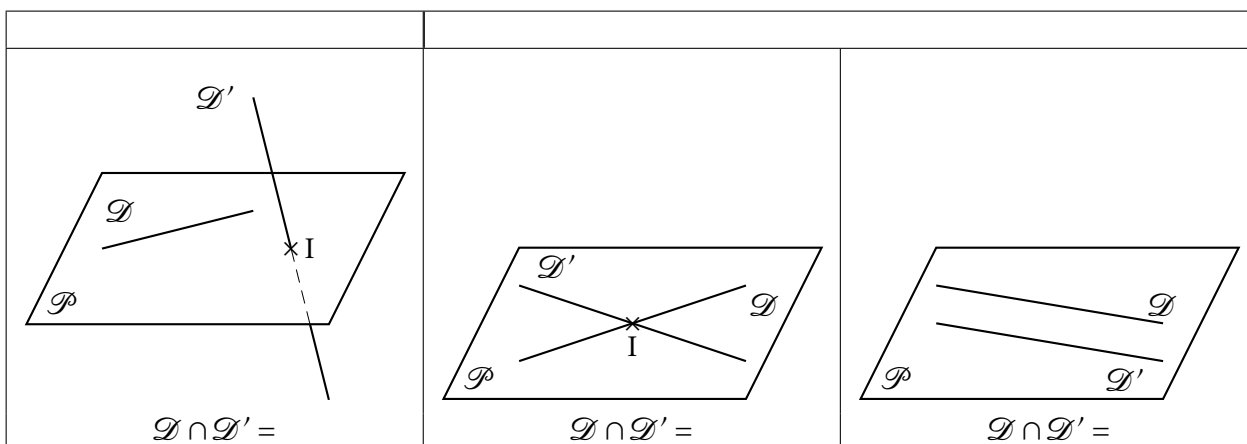
3) Volume d'une sphère



$\mathcal{V} =$

## V- Positions relatives de droites et de plans

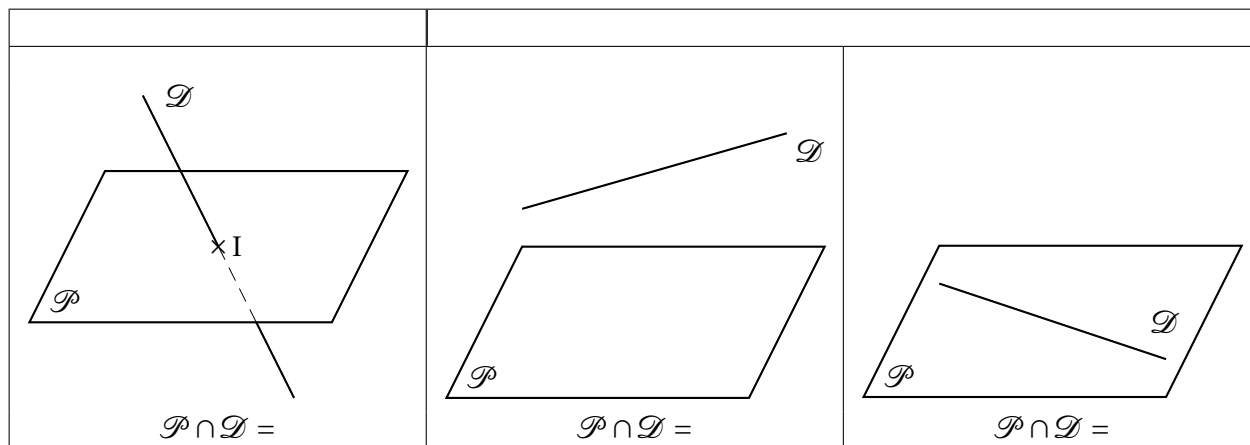
1) Positions relatives de deux droites



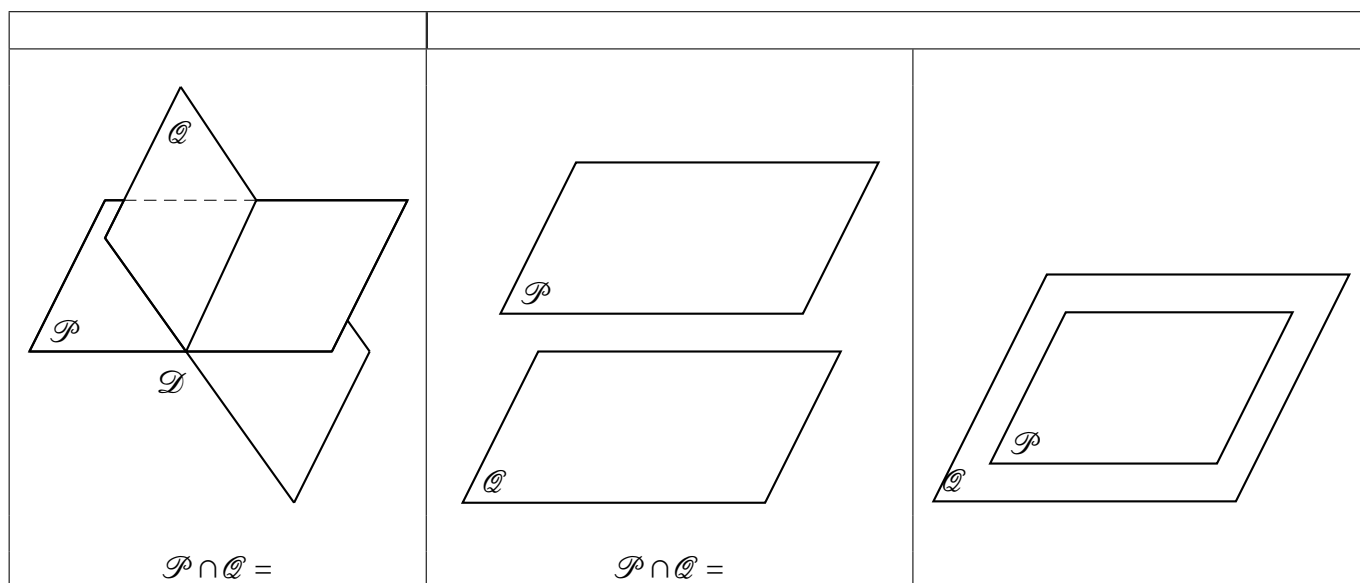
**Remarque:**

Le fait que deux droites n'aient aucun point commun ne suffit pas pour conclure, dans l'espace, qu'elles sont parallèles.

## 2) Positions relatives d'une droite et d'un plan



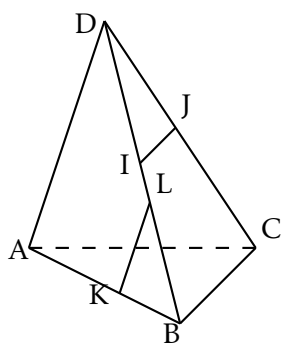
## 3) Positions relatives de 2 plans



### Exemple 4:

ABCD est un tétraèdre. Les points I, J, K et L sont respectivement sur les arêtes [DB], [DC], [AB] et [DB], la droite (IJ) étant parallèle à la droite (BC).

Indiquer les positions relatives des droites et plans suivants.



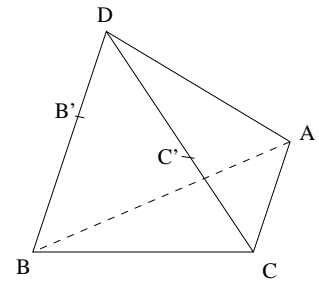
- 1) Les droites (IJ) et (DC) sont ...
- 2) Les droites (IJ) et (LC) sont ...
- 3) Les droites (IJ) et (AB) sont ...
- 4) Les droites (IJ) et (KL) sont ...
- 5) Les droites (IK) et (DC) sont ...
- 6) La droite (IJ) et le plan (ABC) sont ...
- 7) La droite (IJ) et le plan (AKL) sont ...
- 8) Les plans (DAB) et (LDK) sont ...
- 9) Les plans (DAB) et (CIJ) sont ...

### Exemple 5:

ABCD est un tétraèdre.

$B'$  est un point de l'arête  $[BD]$  et  $C'$  est un point de l'arête  $[CD]$ .

- 1) Tracer l'intersection de la droite  $(B'C')$  et du plan  $(ABC)$ . Justifier
- 2) Tracer l'intersection des plans  $(ABC)$  et  $(AB'C')$ . Justifier



## VI- Propriétés

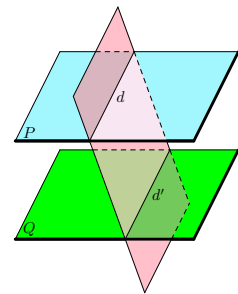
### 1) Parallélisme entre droites

#### Propriété:

Deux droites parallèles à une même troisième droite sont

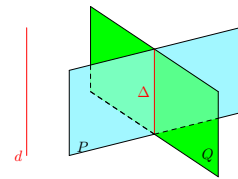
#### Propriété:

Si  $P$  et  $Q$  sont deux plans parallèles, alors tout plan qui coupe  $P$



#### Propriété:

Si une droite est parallèle à deux plans sécants alors elle est

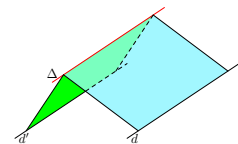


#### Propriété (Théorème du toit):

$d$  et  $d'$  sont deux droites

$P$  est un plan contenant  $d$  et  $P'$  un plan contenant  $d'$ .

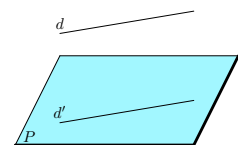
Si, en outre, les plans  $P$  et  $P'$  sont sécants, alors la droite  $\Delta$  d'intersection de ces plans



### 2) Parallélisme entre droite et plan

#### Propriété:

Une droite  $d$  est parallèle à un plan si et seulement si elle



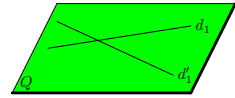
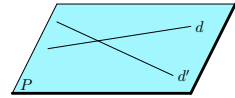
### 3) Parallélisme entre plans

#### Propriété:

Deux plans parallèles à un même troisième plan sont

**Propriété:**

Si deux droites sécantes d'un plan P sont respectivement parallèles à deux droites sécantes d'un plan Q, alors les plans P et Q



# Exercices de géométrie dans l'espace

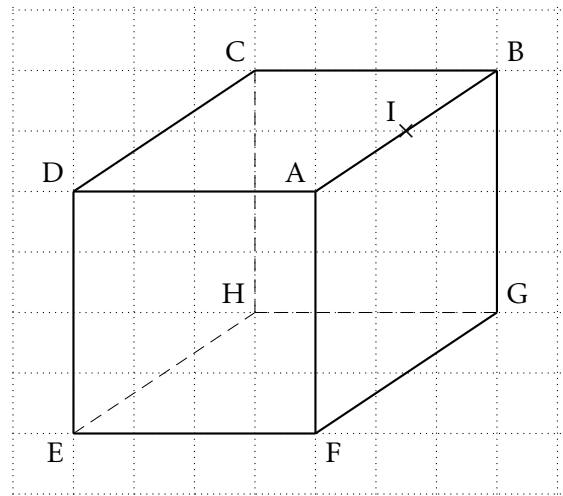
## Exercice 1

- 1) Représenter en perspective cavalière un cube ABCDEFGH d'arête 6 cm avec un angle de fuite  $\alpha = 45^\circ$  et un coefficient de réduction  $k = 0,7$ .
- 2)
  - a. Construire le point I, milieu de [BG].
  - b. Placer le point J sur le segment [EH] tel que  $EJ = 2$  cm.
  - c. Placer le point K sur le segment [HG] tel que  $HK = 4$  cm.
- 3) Quelle est la nature du quadrilatère BCGF? du triangle ADH? du triangle JDH? du triangle BEG?

## Exercice 2

Sur le quadrillage ci-contre, on a représenté un cube d'arête 4 cm en perspective cavalière.

- 1) Mesurer soigneusement l'angle de fuite.
- 2) Calculer le coefficient de réduction de cette représentation en perspective cavalière.
- 3) Retrouver l'angle de fuite par le calcul.
- 4) Que représente le point d'intersection des droites (AG) et (FI) pour le triangle ABF?



## Exercice 3

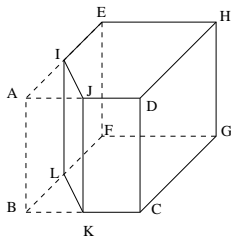
Pour recueillir de l'eau de pluie un particulier enterre dans son jardin une cuve en béton de forme cylindrique de hauteur 1,60m.

Calculer le diamètre de la base du cylindre sachant qu'il peut contenir jusqu'à  $10m^3$  d'eau. Donner le résultat au centimètre près.

## Exercice 4

ABCDEFGH est un cube de coté  $a$ . I, J, K et L sont les milieux respectifs de [AE], [AD], [BC] et [BF].

On découpe dans le cube le coin AIJKBL.

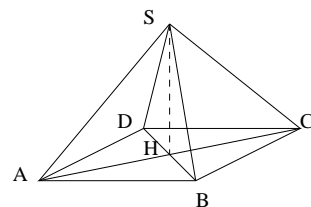


- 1) Quelle est la nature du triangle BLK? Calculer, en fonction de  $a$ , le volume du coin AIJKBL.
- 2) En déduire le volume du morceau de cube restant.

## Exercice 5

Une pyramide régulière ABCDS est une pyramide dont la base est un carré et dont toutes les arêtes ont la même longueur  $a$ . Le pied de la hauteur H issue de S est le centre du carré ABCD.

Calculer le volume de la pyramide ABCD.

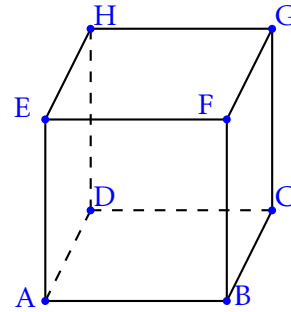


# Intersections et constructions

## 🔦 Exercice 1

ABCDEFGH est un cube.

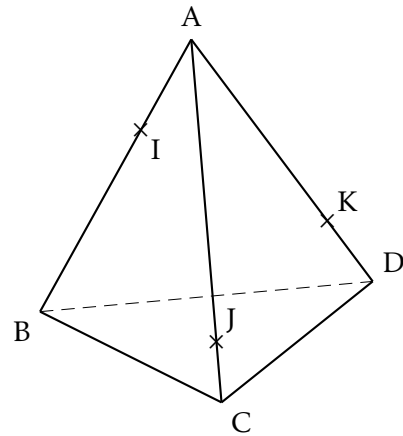
Construire, en justifiant, l'intersection des plans (BEG) et (AFC).



## 🔦 Exercice 2

ABCD est un tétraèdre.  $I \in [AB]$ ,  $J \in [AC]$  et  $K \in [AD]$ .

Construire l'intersection des plans (BCD) et (IJK).

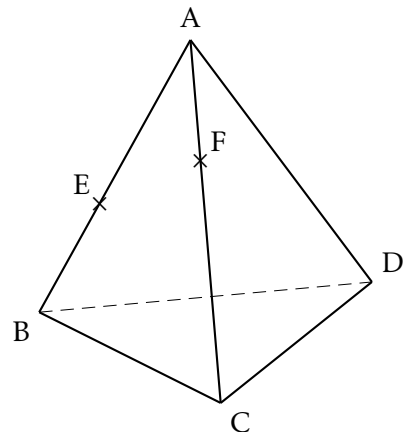


## 🔦 Exercice 3

ABCD est un tétraèdre. E est un point de  $[AB]$  et F un point de  $[AC]$ .

Préciser, en justifiant, la position relative des objets suivants et construire en justifiant les intersections éventuelles.

- 1) Les droites (BD) et (EF).
- 2) Les droites (BC) et (BF).
- 3) La droite (EF) et le plan (BCD).
- 4) Les plans (EFC) et (BCD)
- 5) Les plans (EFD) et (BCD)



## 🔦 Exercice 4

SABCD est une pyramide régulière à base carrée.

- 1) Construire, en justifiant, l'intersection des plans (SBD) et (SAC).
- 2) Construire, en justifiant, l'intersection des plans (SAB) et (SDC).

