Correction de l'épreuve du groupe 2 Mercredi 30 avril 2014

Première partie (13 points)

Partie A - La montée à la station

1) $\tan\alpha = 0,25 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arctan(0,25) \approx 14°$

2) Soit ℓ la longueur de la route : $\sin\alpha = \dfrac{145}{\ell} \quad \Leftrightarrow \quad \ell = \dfrac{145}{\sin\alpha} \approx \dfrac{145}{\sin 14°} \approx 600$ m

Partie B - Ski sur la Streif

1) Calcul de la durée t_1 d'Albert en heures de la descente par la méthode du complément :
   - de 14h 58 min 47 s à 14 h 59 min : 13 s
   - de 14h 59 min à 15 h : 1 min = 60 s
   - de 15 h à 15 h 03 min 08 s : 3 min 8 s = 188 s

   Donc $t_1 = \dfrac{13+60+188}{3600} = \dfrac{261}{3600} = 0,0725$

   La vitesse moyenne v_1 est alors : $v_1 = \dfrac{L}{t_1} = \dfrac{3,312}{0,0725} \approx 45,7$ km/h.

2) Durée t_2 du meilleur skieur en heure et $v_2 = 100$ km/h sa vitesse.

$$t_2 = \frac{L}{v_2} = \frac{3,312}{100} = 0,03312$$

   On transforme cette durée en secondes : ≈ 119 s

   Il est donc arrivé $261 - 119 = 142$ s avant lui soit 2 min 22 s.

Partie C - Saut sur la Streif

1) L'image de 10 est : $S(10) = 2,5 - \dfrac{(2\times 10 - 55)^2}{1210} = 2,5 - \dfrac{35^2}{1210} \approx 1,49$ m.

2) a) 55 m correspond au déplacement horizontal total d'Albert au cours du saut.

   b) La hauteur maximal d'Albert a été de 2,5 m. Elle correspond à un déplacement horizontal de ≈ 27 m

3) La forme donnée de S correspond à la forme canonique. La hauteur maximale est obtenue lorsque $(2x-55)^2 = 0$ elle est alors de 2,5 m.

   Le déplacement horizontal est alors de $\dfrac{55}{2} = 27,5$ m

Partie D - Tir à la carabine

1) La probabilité est égale à l'aire de la couronne quadrillée sur l'aire de la cible :

$$P_1 = \frac{\pi \times 15^2 - \pi \times 10^2}{\pi \times 15^2} = \frac{225 - 100}{225} = \frac{115}{225} = \frac{23}{45} \approx 0,511$$

2) Le tireur a une chance sur deux d'obtenir la cible puis la probabilité du rapport de l'aire de la partie noire sur l'aire de la cible :

$$P_2 = \frac{1}{2} \times \frac{\pi \times 5^2}{\pi \times 15^2} = \frac{1}{2} \times \frac{25}{225} = \frac{25}{450} = \frac{1}{18} \approx 0,056$$

Deuxième partie (13 points)

EXERCICE 1

1) Ce problème relève de la division euclidienne.

2)
- 1re méthode : la division euclidienne de 83 par 5 : $83 = 5 \times 16 + 3$

  Mathis a effeuillé totalement 16 fleurs.
- 2e méthode : par soustractions successives de 5 :

  $83 - 5 = 78,\ 78 - 5 = 73,\ 73 - 5 = 68,$ etc.
  On peut faire 16 soustractions, Mathis a effeuillé 16 fleurs.
- Par addition successives de 5 jusqu'à obtenir un nombre supérieur à 83 :

  $0 + 5 = 5,\ 5 + 5 = 10,\ \ 10 + 5 = 15,$ etc.
  On peut additionner 16 fois 5 sans dépasser 83. Mathis a effeuillé 16 fleurs.

EXERCICE 2

1) Soit n le nombre de bonbons de Emma.

   Si on divise n par 2, 3, 4, 5, 6 il reste 1 donc $(n - 1)$ est divisible par 2, 3, 4, 5, 6.
   Calculons $\text{pgcd}(2, 3, 4, 5, 6) = \text{pgcd}(3, 4, 5) = 60$.

   $(n - 1)$ est un multiple de 60. Comme $n < 100$ alors $n - 1 = 60 \quad \Leftrightarrow \quad n = 61$.

   Emma a 61 bonbons.

2) a) Pour pouvoir déplacer la figure vers le bas, il faut bloquer la ligne de la cellule B1, donc la formule à insérer est : $\boxed{= \text{MOD}(\text{A2}; \text{B\$1})}$

   b) Jules doit retenir uniquement les nombres de la colonne A qui possèdent que des « 1 » dans les colonnes B, C, D, E, F.

EXERCICE 3

1) On teste avec une série simple : $4^2 - 3^2 - 2^2 + 1 = 16 - 9 - 4 + 1 = 4$.

Conjecture : Pour tout entier naturel n :

$$(n+3)^2 - (n+2)^2 - (n+1)^2 + n^2 = 4$$

2) Démonstration :

$$\begin{aligned}(n+3)^2-(n+2)^2-(n+1)^2+n^2 &= n^2+6n+9-(n^2+4n+4)-(n^2+2n+1)+n^2 \\ &= n^2+6n+9-n^2-4n-4-n^2-2n-1+n^2 \\ &= 9-4-1 \\ &= 4\end{aligned}$$

EXERCICE 4

1) Sur le carré ABCD, comme IJKL sont les milieux respectifs des côtés [AB], [BC], [CD] et [DA], les triangles BIJ, CJK, DKL et ALI sont isométriques donc IJ = JK = KL = LI. Le quadrilatère IJKL est un losange. De plus, les diagonales [IK] et [JL] sont égales car dans un carré les médiatrices sont de même longueur. IJKL est un rectangle.
IJKL est un losange et un rectangle donc IJKL est un carré.

2) Le triangle BIJ est rectangle en B. Calculons la longueur IJ à l'aide du théorème de Pythagore :

$$\mathrm{IJ}^2 = \mathrm{IB}^2 + \mathrm{BJ}^2 = 6^2 + 6^2 = 72 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{IJ} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

L'aire $\mathscr{A}$ du carré IJKK vaut : $\mathscr{A} = \mathrm{IJ}^2 = 72 \text{ cm}^2$.

3) Volume V_1 de la pyramide AILM :

$$V_1 = \frac{1}{3} \times \mathscr{A}_{\mathrm{AIL}} \times \mathrm{AM} = \frac{1}{2} \times \frac{6 \times 6}{2} \times 6 = 36 \text{ cm}^3$$

4) Le volume V_2 du nouveau solide, vaut le volume du cube moins 8 fois le volume V_1 :

$$V_2 = \mathrm{AB}^2 - 8V_1 = 12^3 - 8 \times 36 = 1728 - 288 = 1440 \text{ cm}^3$$