Numération - Correction

EXERCICE 1

On pose $N = \overline{xy}$. On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} x+y=9 \\ \overline{xy}=45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=9 \\ 9x-9y=45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=9 \\ x-y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=2 \end{cases}$$

On trouve alors $N = 72$.

EXERCICE 2

On suppose que le dictionnaire à moins de 2000 pages. On compte alors le nombre de caractère jusqu'à la page 2 000.

De la page	1 à 9	on a utilisé	9	caractères
De la page	10 à 99	on a utilisé	$2 \times 90 = 180$	caractères
De la page	100 à 999	on a utilisé	$3 \times 900 = 2\,700$	caractères
De la page	1000 à 1999	on a utilisé	$4 \times 1\,000 = 4\,000$	caractères

$9 + 180 + 2\,700 + 4\,000 = 6\,889$ soit une différence de $6\,889 - 6\,869 = 20$
Il faut donc enlever 20 caractères soit 5 nombres à 4 caractères.
Il y a donc $1\,999 - 5 = 1\,994$ pages.

EXERCICE 3

Immatriculation

1) de AA-001-AA à AA-999-AA, il y a 999 numéros, donc
de AA-001-AA à AA-999-AZ, il y a $999 \times 26 = 25\,974$ numéros

2) de AA-001-AA à AA-999-AZ, il y a 25 974 numéros, et
de AA-001-BA à AA-999-BC, il y a $999 \times 3 = 2\,997$ numéros, et
de AA-001-BD à AA-011-BD, il y a 11 numéros, donc

il y a : $25\,974 + 2997 + 11 = 28\,982$ numéros de AA-001-AA à AA-011-BD.

3) De AA-001-AA à AA-999-ZZ, il y a $25\,974 \times 26 = 675\,324$ numéros

4) De AA-001-AA à ZZ-999-ZZ, il y a $675\,324 \times 26^2 = 456\,519\,024$ numéros.

Il faudra donc : $\dfrac{456\,519\,024}{7\,000\,000} \approx 65$ ans pour épuiser les immatriculations

EXERCICE 4

$13 = \overline{1\,101}^2$; $17 = \overline{10\,001}^2$; $22 = \overline{10\,110}^2$

EXERCICE 5

1) Les 10 premiers entiers en base 2 :
$\overline{1}^2$, $\overline{10}^2$, $\overline{11}^2$, $\overline{100}^2$, $\overline{101}^2$, $\overline{110}^2$, $\overline{111}^2$, $\overline{1\,000}^2$, $\overline{1\,001}^2$, $\overline{1\,010}^2$.
$44 = \overline{101\,100}^2$; $100 = \overline{1\,100\,100}^2$; $2001 = \overline{11\,111\,010\,001}^2$

2) Les 16 premiers entiers en base 5 : $\overline{1}^5$, $\overline{2}^5$, $\overline{3}^5$, $\overline{4}^5$, $\overline{10}^5$, $\overline{11}^5$, $\overline{12}^5$, $\overline{13}^5$, $\overline{14}^5$, $\overline{20}^5$, $\overline{21}^5$, $\overline{22}^5$, $\overline{23}^5$, $\overline{24}^5$, $\overline{30}^5$, $\overline{31}^5$.
$25 = \overline{100}^5$; $27 = \overline{212}^5$; $128 = \overline{1\,003}^5$; $500 = \overline{4\,000}^5$; $1728 = \overline{23\,403}^5$

3) $243 = \overline{100\,000}^3$; $1000 = \overline{1\,101\,001}^3$

EXERCICE 6

1) $\overline{4\,444}^5 = 624$

2) $\overline{210\,210}^3 = 588$

3) $\overline{3\,420}^7 = 1\,239$

4) $\overline{110\,011\,001}^2 = 409$

EXERCICE 7

Problèmes de bases.

1) Comme le chiffre le plus grand est 5, la base est supérieur ou égal à 6 : $a \geqslant 6$
En décomposant les nombres en base 10 on obtient l'équation suivante :

$$3a + 5 + a + 3 = 5a + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 3a + a - 5a = -2 - 3 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad -a = -7 \quad \Leftrightarrow \quad a = 7$$

La base cherchée est donc 7.

2) L'énonce se traduit par :

$$\overline{xyz}^7 = \overline{zyx}^9 \quad \text{avec les conditions} \quad 1 \leqslant x \leqslant 6\,,\ 0 \leqslant y \leqslant 6\,,\ 1 \leqslant z \leqslant 6$$

En transcrivant en base 10, on obtient :

$$\begin{aligned} 7^2x + 7y + z = 9^2z + 9y + x \quad &\Leftrightarrow \quad 49x + 7y + z = 81z + 9y + x \\ 49x + z - 81z - x = 9y - 7y \quad &\Leftrightarrow \quad 48x - 80z = 2y \\ y = 24x - 40z \quad &\Leftrightarrow \quad y = 8(3x - 5z) \end{aligned}$$

Donc y est un multiple de 8 compris entre 0 et 6. Seul $y = 0$ peut être solution.
On a alors :

$$3x - 5z = 0 \quad \text{soit} \quad 3x = 5z$$

donc 5 divise $3x$, comme 3 et 5 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss, 5 divise x. Comme x est compris entre 1 et 6, on a $x = 5$ d'où $z = 3$.

Le nombre cherché est 503 en base 7 soit en base 10 : $5 \times 49 + 3 = 248$

EXERCICE 8

1)

	$\overline{11}^n$	$\overline{111}^n$
$n = 2$	3	7
$n = 3$	4	13
$n = 4$	5	21
$n = 5$	6	31

2) En transcrivant en base 10, on a :

$$n^2+n+1=73 \quad \Leftrightarrow \quad n^2+n=73-1 \quad \Leftrightarrow \quad n(n+1)=72$$

On cherche une décomposition de 72 avec deux entiers consécutifs, soit 8×9. On a donc $n=8$.

3) En transcrivant en base 10, on a :

$$(n+1)^2-(n^2+n+1)=5 \quad \Leftrightarrow \quad n^2+2n+1-n^2-n-1=5 \quad \Leftrightarrow \quad n=5$$

La base cherchée est donc 5.

4) En transcrivant en base 10, on a :

$$(n+1)^2-(n^2+n+1)=n \quad \Leftrightarrow \quad n^2+2n+1-n^2-n-1=n \quad \Leftrightarrow \quad n=n$$

Cette égalité est toujours vérifiée pour tout n supérieur à 2. On ne peut donc déterminer n.

EXERCICE 9

Soit un nombre de trois chiffres : $\overline{abc}$ avec $a \neq 0$.

Les conditions de l'énoncé donne : $\begin{cases} \overline{abc}-\overline{cba}=297 & (1) \\ a+b+c=11 & (2) \\ 3a+2b=22 & (3) \end{cases}$

On réduit l'équation (1)

$$100a+10b+c-100c-10b-a=297 \quad \Leftrightarrow \quad 99a-99c=297 \quad \Leftrightarrow \quad a-c=3 \quad \Leftrightarrow \quad c=a-3$$

On remplace dans l'équation (2)

$$a+b+a-3=11 \quad \Leftrightarrow \quad 2a+b=14 \quad \Leftrightarrow \quad b=14-2a$$

On remplace dans l'équation (3)

$$3a+2(14-2a)=22 \quad \Leftrightarrow \quad 3a+28-4a=22 \quad \Leftrightarrow \quad -a=-6 \quad \Leftrightarrow \quad a=6$$

On en déduit alors : $b=14-2\times 6=2 \quad \text{et} \quad c=6-3=3$

Le nombre cherché est donc : 623

EXERCICE 10

1) La plus petite valeur de u possible est 1, donc comme $m>c>d>u$, pour que N soit le plus petit possible on doit avoir $u=1,\ d=2,\ c=3,\ m=4$.
Donc la valeur minimale de N est 4 321.

2) La plus grande valeur de m possible est 9, donc comme $m>c>d>u$, pour que N soit le plus grand possible, on doit avoir : $m=9,\ c=8,\ d=7,\ u=6$.
Donc le valeur maximale de N est : 9 876

3) Liste pour laquelle N a pour chiffre des milliers est 6 .
Par une méthode exhaustive, on obtient 10 nombres possibles :
6 543, 6 542, 6 541, 6 532, 6 531, 6 521, 6 432, 6 431, 6 421, 6 321.

4) $D = \overline{mcdu} - \overline{udcm}$
$= 1000m + 100c + 10d + u - 1000u - 100d - 10c - m$
$= 999m + 90c - 90d - 999u$
$= 9(111m + 10c - 10d - 111u)$

5) Immédiat par une factorisation par 9.

6) $D = 9[(111m + 10c) - (10d + 111u)]$
pour rendre maximum D, il faut rendre $(111m + 10c) - (10d + 111u)$ le plus grand possible donc que m et c soient les plus grands possibles et que d et u soient les plus petits possibles. On obtient alors :

$$m = 9 \quad , \quad c = 8 \quad , \quad d = 2 \quad , \quad u = 1$$

$N = 9\,821$ et $D_{\text{max}} = 9\,821 - 1\,289 = 8\,532$.

7) Regroupons les termes de D autrement : $D = 9[111(m-u) + 10(c-d)]$

Pour rendre D minimum il faut minimiser $111(m-u) + 10(c-d)$.
Pour cela il faut que $(m-u)$ et $(c-d)$ soit le plus petit possible.
Suivant les contraintes de l'énoncé, on doit avoir : $m - u = 3$ et $c - d = 1$

Ce qui nous donne $D_{\text{min}} = 9(111 \times 3 + 10 \times 1) = 3\,087$.
On obtient par contre plusieurs valeurs de N correspondantes :
9 876, 8 765, 7 654, 6 543, 5 432, 4 321.

EXERCICE 11

1) La somme des chiffres de ce nombre est égale à 29, donc :

$$E + 9 + 7 + F = 29 \quad \Leftrightarrow \quad E + F = 29 - 9 - 7 \quad \Leftrightarrow \quad E + F = 13$$

comme E et F sont des chiffres, donc compris entre 0 et 9, les seuls choix possibles sont les couples $(E\,,\,F)$ suivants :
(4 , 9) ; (5 , 8) ; (6 , 7) ; (7 , 6) ; (8 , 5) et (9 , 4)

2) Le produit des chiffres de ce nombre est égal à 2 268, donc :

$$E \times 9 \times 7 \times F = 2\,268 \quad \Leftrightarrow \quad E \times F = \frac{2\,268}{63} \quad \Leftrightarrow \quad E \times F = 36$$

Les seuls couples qui vérifie cette égalité sont : $(4\,,9)$ et $(9\,,4)$.
On obtient les deux nombres EF suivants : 49 et 94
Le seul nombre qui est divisible par 7 est 49, donc $E = 4$ et $F = 9$.