Opérations dans N. Division euclidienne - Correction

EXERCICE 1

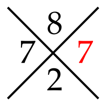
Voir le cours

EXERCICE 2

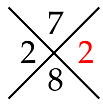
Opérations posées.

1) On a les résultats suivants :

$$\begin{array}{r} 3\,5 \\ \times\ 4\,7 \\ \hline 2\,4\,5 \\ 1\,4\,0\,\cdot \\ \hline 1\,6\,4\,5 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 9\,3\,4 \\ \times\ 3\,1\,4 \\ \hline 3\,7\,3\,6 \\ 9\,3\,4\,\cdot \\ 2\,8\,0\,2\,\cdot\,\cdot \\ \hline 2\,9\,3\,2\,7\,6 \end{array}$$



2) On a les résultats suivants :

$$\begin{array}{r|l} 7\,2 & 3 \\ \cline{2-2} 1\,2 & 2\,4 \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2\,7\,8\,2 & 2\,6 \\ \cline{2-2} 1\,8\,2 & 1\,0\,7 \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 7\,8\,0\,5 & 2\,7 \\ \cline{2-2} 2\,4\,0 & 2\,8\,9 \\ 2\,4\,5 & \\ 2 & \end{array}$$

Voir le cours

3) Trois méthodes : par le complément, par l'emprunt et la méthode traditionnelle.

4) Multiplication à la russe et « *per gélosia* » (voir cours)

5) Regrouper 15 points par groupe de 4.

EXERCICE 3

Multiplication et division.

1) Compléter les division à trous suivantes :

$$\begin{array}{ccc|cc} 8 & 1 & 4 & 5 & 8 \\ \cline{4-5} 2 & 3 & 4 & 1 & 4 \\ & & 2 & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc|cc} 7 & a & 7 & b & 7 \\ \cline{4-5} & 7 & c & 7 & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|cc} 7 & 5 & 7 & 9 & 7 \\ \cline{4-5} & 7 & 8 & 7 & \end{array}$$

Pour la 1[re] division pour le calcul du quotient on a : $810 \leqslant 58q \leqslant 819$
On en déduit alors : $q = 14$. Les autres chiffres se déduisent alors facilement.

Pour la 2[e] division :
De $7 \times 7 = 49$ ôté de 57, il reste 8 d'où $c = 8$ et l'on a une retenue de 5.
Dans 70, il ne peut y avoir que 9 fois 7 donc $b = 9$.
On a alors : $63 + 5 = 70 + a - 7$ soit $a = 5$

2) Compléter les multiplications à trous suivantes :

$$\begin{array}{ccccc} & 8 & 9 & 6 & 3 \\ \times & & & & 9 \\ \hline 8 & 0 & 6 & 6 & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} & & 5 & 2 & 8 & 3 \\ \times & & & & 3 & 9 \\ \hline & 4 & 7 & 5 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & 8 & 4 & 9 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 6 & 0 & 3 & 7 \end{array}$$

EXERCICE 4

Divisions

1) La division euclidienne associée est : $a = 83 \times 403 + r$ avec $r < 83$.
   On a donc $33449 \leqslant a \leqslant 33531$
2) La division euclidienne donne : $8592 = d \times 38 + r$ avec $r < d$
   On en déduit alors : $38d \leqslant 8592 < 39d$
   Comme $\dfrac{8592}{38} \approx 226,1$, on a donc $d \leqslant 226$
   Comme $\dfrac{8592}{39} \approx 220,3$, on a $d \geqslant 221$
   Nous obtenons donc 6 solutions suivantes en prenant les valeurs de d de 221 à 226 :

$$\begin{array}{lcl} 8592 = 221 \times 38 + 194 & , & 8592 = 222 \times 38 + 156 \\ 8592 = 223 \times 38 + 118 & , & 8592 = 224 \times 38 + 80 \\ 8592 = 225 \times 38 + \ \ 42 & , & 8592 = 226 \times 38 + 4 \end{array}$$

Soit N un nombre entier naturel de deux chiffres qui divisé par 37, donne un quotient égal au reste, on a alors : $N = 37 \times q + q = 38q$ avec $q < 37$
N est alors un multiple de 38, et comme N est un nombre de deux chiffres, donc compris entre 10 et 99, $N = 38$ ou $N = 76$.

EXERCICE 5

De $428 \times 73 = 31\,244$, on déduit :

$$\begin{aligned} 428 \times 79 &= 428 \times 73 + 428 \times 5 + 428 = 428 \times 73 + \frac{428 \times 10}{2} + 428 \\ &= 31\,244 + 2\,140 + 428 = 33\,812 \end{aligned}$$

$$427 \times 73 = 428 \times 73 - 73 = 31\,244 - 73 = 31\,171$$

EXERCICE 6

Sachant que $4\,728 = 73 \times 64 + 56$, on a alors :

$$\begin{aligned} 4\,733 &= 4\,728 + 5 = 73 \times 64 + 56 + 5 = 73 \times 64 + 61 \\ 4\,748 &= 4\,728 + 20 = 73 \times 64 + 56 + 20 = 73 \times 64 + 76 = 73 \times 65 + 3 \\ 4\,671 &= 4\,728 - 57 = 73 \times 64 + 56 - 57 = 73 \times 64 - 1 = 73 \times 63 + 72 \end{aligned}$$

EXERCICE 7

a) **Faux** ; contre-exemple : 6 multiple de 3 mais pas de 9.

b) **Vrai** ; car 5 et 7 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss, ces nombres sont divisibles par $5 \times 7 = 35$.

c) **Faux** ; contre-exemple : 12 est divisible par 4 et 6 mais pas par 24

d) **Vrai** ; car 12 est divisible par 4.

e) **Faux** ; contre-exemple : 2 est premier et pair.

f) **Faux** ; le reste doit être inférieur au quotient or $18 > 13$

EXERCICE 8

D'après les règles de divisibilité :

- 36 054 est divisible par 2 (se termine par 4)
- 36 054 est divisible par 9 car $3 + 6 + 0 + 5 + 4 = 18$ divisible par 9.

  36 054 est divisible par 2 et par 9, comme 2 et 9 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss 36 054 est divisible par $9 \times 2 = 18$

EXERCICE 9

Soit N le nombre de bouteilles.

- Le reste de la division de N par 3, 5 et 7 est 2 alors $(N - 2)$ est divisible par 3, 5 et 7.
- 3, 5 et 7 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss, $(N - 2)$ est divisible par $3 \times 5 \times 7 = 105$.
- On sait que $1500 \leqslant N \leqslant 1600$ donc $1498 \leqslant N - 2 \leqslant 1598$.
- On cherche un multiple de 105 compris entre 1498 et 1598.
  On trouve alors : $105 \times 15 = 1575$, soit $N = 1575 + 2 = 1577$.

EXERCICE 10

1) Soit N le nombre d'enfants en colonie de vacances.

- Le reste de la division de N par 3 et par 5 est donc $(N - 2)$ est divisible par 3 et par 5.
- 3 et 5 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss, $(N - 2)$ est divisible par $3 \times 5 = 15$.
- $N \leqslant 100$ donc $N - 2 \leqslant 98$.
- On cherche donc tous les multiples de 15 inférieurs à 98. On trouve 15, 30, 45, 60, 75 et 90.
- Faisons un tableau avec ces différentes possibilités,

$N - 2$	15	30	45	60	75	90
N	17	32	47	62	77	92
$N - 1$	16	31	46	61	76	91

- Le reste de la division de N par 4 est 1 donc $(N - 1)$ est divisible par 4.

- D'après notre tableau, seules les valeurs 17 et 77 pour N vérifient cette condition.
- Les moniteurs peuvent former plusieurs équipes, or 17 ne peut se décomposer, donc seule la valeur $N = 77$ convient. Il y a 77 enfants dans cette colonie de vacances.

2) Comme $77 = 7 \times 11$, les moniteurs peuvent faire 7 équipes de 11 ou 11 équipes de 7.

EXERCICE 11

1) 2 596 est divisible par 11 car :
$(6+5) - (9+2) = 11 - 11 = 0$ qui est divisible par 11.

La plus grande différence entre les chiffres de rang pair et les chiffres de rang impair est $(9+6) - (5+2) = 8$. Donc les seuls multiples de 11 que l'on peut former avec les nombres 2, 5, 6 et 9 ont une différence nulle entre les chiffres de rang impair et de rang impair.

Il s'agit de trouver deux couples avec les chiffres 2, 5, 6 et 9 qui ont une différence nulle. Il s'agit des couples $(2\ ;\ 9)$ et $(5\ ;\ 6)$. On peut alors former les nombres suivants :

$$2\,596,\ 2\,695,\ 9526,\ 9\,625,\ 6\,259,\ 5\,269,\ 5\,962,\ 6\,952$$

2) Cette question était un peu plus difficile. Elle nécessite de savoir que la somme et la différence de deux entiers ont la même parité. C'est à dire que si la somme est paire alors la différence l'est aussi et inversement.

or : $1+2+3+4+5+6 = 21$

Donc la différence entre 2 triplets quelconques formés avec ces chiffres sera impaire.
Donc si l'on peut former un nombre avec ces 6 chiffres divisible par 11 alors la différence entre les rangs pairs et les rangs impairs sera soit 11 soit -11.

La plus grande différence que l'on peut faire est : $(6+5+4) - (3+2+1) = 9$

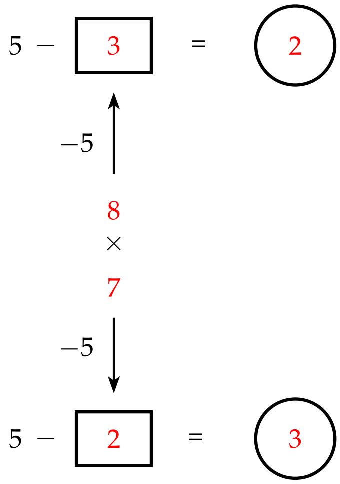
La plus petite est : $(3+2+1) - (6+5+4) = -9$

On ne peut donc obtenir ni 11 ni -11.
Le problème n'admet donc aucune solution.

EXERCICE 12

1) On obtient le diagramme suivant :

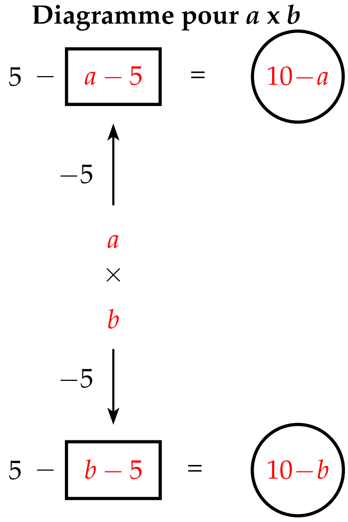
Diagramme pour 8 x 7



$$8 \times 7 = (3+2) \times 10 + (2 \times 3) = 50 + 6 = 56$$

2) a) Reproduire et compléter le diagramme pour le produit $a \times b$.

Diagramme pour *a* x *b*



b) Du diagramme, nous obtenons :

$$[(a-5)+(b-5)] \times 10 + (10-a) \times (10-b) = 10(a+b-10) + (10-a)(10-b)$$

c) En développant nous obtenons :

$$10(a+b-10) + (10-a)(10-b) = 10a + 10b - 100 + 100 - 10b - 10a + ab = ab$$

Le calcul issu du diagramme donne bien le produit $a \times b$.

Exercice 13

1) Les multiples de 7 inférieurs à 10 sont :
0, 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98.

2) Appliquons la procédure :

406 est-il divisible par 7 ?

$$\begin{array}{r|l} 40 & 6 \\ -12 & 6 \times 2 \\ 28 & \end{array}$$

28 est divisible par 7
donc 406 aussi

895 est-il divisible par 7 ?

$$\begin{array}{r|l} 89 & 5 \\ -\ \ 10 & 5 \times 2 \\ 79 & \end{array}$$

79 n'est pas divisible par 7
donc 895 non plus.

3906 est-il divisible par 7 ?

$$\begin{array}{r|l} 390 & 6 \\ -12 & 6 \times 2 \\ 378 & \end{array}$$

Recommençons la procédure

pour 378.

378 est-il divisible par 7 ?

$$\begin{array}{r|l} 37 & 8 \\ -\ \ 16 & 8 \times 2 \\ 21 & \end{array}$$

21 est divisible par 7
donc 378 aussi,
donc 3906 aussi.

> Un nombre est divisible par 7 si la différence entre le nombre des dizaines et le double du chiffre des unités est divisible par 7.

3) Décomposition des nombres 273 et 1856.

$$273 = 10 \times 27 + 3 \qquad \text{et} \qquad 1\,856 = 10 \times 185 + 6$$

Nombre N obtenu après la procédure : $N = v - 2u$.

Si N est divisible par 7, alors il existe un entier k tel que :
$N = 7k$, d'où $v = 7k + 2u$.

Montrons alors que E est divisible par 7 :

$E = 10v + u = 10(7k + 2u) + u = 70k + 20u + u = 70k + 21u = 7(10k + 3u)$

E est bien divisible par 7.