Les ensembles de nombres - Correction

EXERCICE 1

Différents nombres

Voir cours. On obtient le tableau suivant :

	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{5}$	$\sqrt{2}$	$0,272$	$\frac{22}{7}$	$\frac{14}{2}$	$-6,5$	π
$\mathbb{N}$	non	non	non	non	non	oui	non	non
$\mathbb{Z}$	non	non	non	non	non	oui	non	non
$\mathbb{D}$	non	oui	non	oui	non	oui	oui	non
$\mathbb{Q}$	oui	oui	non	oui	oui	oui	oui	non
$\mathbb{R}$	oui	oui	oui	oui	oui	oui	oui	oui

EXERCICE 2

$1,07 < 1{,}100\,9 < 1,109 < 1,7 < 1,81 < 1,81$

On a : $1,102 < 1,1 < 1,12$.

EXERCICE 3

$$\frac{255}{35} = \frac{51}{7} \quad ; \quad \frac{26}{65} = \frac{2}{5} \quad ; \quad \frac{450}{756} = \frac{25}{42} \quad ; \quad \frac{2415}{966} = \frac{5}{2} \quad ; \quad \frac{5863}{1144} = \frac{41}{8}$$

EXERCICE 4

Une fraction décimale est une fraction du type : $\dfrac{a}{10^n}$.

$$\frac{a}{b} = \frac{a+21}{b+30} \Leftrightarrow ab + 30a = ab + 21b \Leftrightarrow 30a = 21b \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{21}{30} = \frac{7}{10}$$

EXERCICE 5

Un nombre rationnel q est un nombre décimal si q peut se mettre sous la forme d'une fraction décimale ou si le dénominateur de la fraction irréductible de q ne comporte que des puissances de 2 ou des puissances de 5.

$\dfrac{17}{8}$ décimal car $8 = 2^3$; $\dfrac{8}{17}$ non décimal car 17 est premier

$\dfrac{2794}{55} = \dfrac{254}{5} = \dfrac{508}{10}$ décimal ; $\dfrac{1096}{152} = \dfrac{137}{19}$ non décimal car 19 est premier.

EXERCICE 6

7 ne divise pas 22. Comme la fraction n'est pas un nombre décimal, elle possède un nombre de chiffres après la virgule infini. Les restes possibles des différentes

divisions par 7 ne peuvent être que 1, 2, 3, 4, 5 et 6. Au bout de la 7e division un des restes se répétera créant ainsi une série de chiffres qui se répétera à l'infini.

$\dfrac{22}{7} = 3,\overline{142\,857}$

On peut généraliser ce principe car lorsque l'on divise a par b, après b divisions un reste se répétera nécessairement.

Exercice 7

On cherche le chiffre des unités des deux produits suivants :

$$208\,341 \times 99\,532 \qquad 66\,317 \times 312\,689$$

Le chiffre des unités du premier produit est 2 (2×1) tandis que le chiffre des unités du second produit est 3 ($7 \times 9 = 63$). Ces deux fractions ne sont donc pas égales !

Ces deux fractions représente l'encadrement à 10^{-10} du nombre π.

Exercice 8

$0{,}005\,94 = 5,94 \times 10^{-3}$
$124\,000\,000 = 1,27 \times 10^{8}$
$1\,450 = 1,45 \times 10^{3}$

$3\,140\,000\,000\,000 = 3,14 \times 10^{12}$
$0{,}000\,001\,5 = 1,5 \times 10^{-6}$
$362 \times 10^{5} = 3,62 \times 10^{7}$

Exercice 9

$1,457 \times 10^{6} = 1\,457\,000$
$2,395 \times 10^{-1} = 0{,}239\,5$
$5,3 \times 10^{11} = 530\,000\,000\,000$

$0{,}068\,35 \times 10^{4} = 683{,}5$
$35,8 \times 10^{-3} = 0{,}035\,8$

Exercice 10

On obtient le tableau suivant et $\sqrt{5} \approx 2,2361$ à 10^{-4} près.

$\dfrac{121}{17}$	Approximation : 2 chiffres après la virgule	Approximation : 4 chiffres après la virgule
Par excès	7,12	7,1177
Par défaut	7,11	7,1176
Au plus près	7,12	7,1176

Exercice 11

Diviseurs

On décompose 120 en facteurs premiers. On trouve : $120 = 2^3 \times 3 \times 5$.

Il y a donc : $(3+1)(1+1)(1+1) = 16$ diviseurs.

On peut proposer un algorithme qui est basé sur le fait que si d divise N, alors $N = kd$ donc le quotient k est aussi un diviseur de N. Ainsi lorsque l'on trouve un diviseur d'un entier N, on en trouve un second.
On remplit le tableau ci-contre. La première colonne s'arrête lorsque le diviseur d est supérieur à $\sqrt{N}$.
Par exemple avec 120 :

diviseur d	quotient k
1	120
2	60
3	40
4	30
5	24
6	20
8	15
10	12

On trouve alors les 16 diviseurs de 120 :

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 15,\ 20,\ 24,\ 30,\ 40,\ 60,\ 120$$

EXERCICE 12

Problème

1) Soit x le nombre ajouté. On a alors :

$$\frac{19+x}{39+x} = 2 \times \frac{19}{39} \Leftrightarrow \frac{19+x}{39+x} = \frac{38}{39}$$
$$39(19+x) = 38(39+x) \Leftrightarrow 741 + 39x = 1482 + 38x$$
$$39x - 38x = 1482 - 741 \Leftrightarrow x = 741$$

2) - **Proposition fausse**. Contre-exemple : si $x = \dfrac{3}{2}$ alors $2x = 3$ est un entier tandis que x ne l'est pas.
   - **Proposition vraie.** En effet si $\dfrac{x}{2} = n$ alors $x = 2n$ est bien entier.
   - **Proposition fausse.** Contre-exemple : si $x = -1$ on a $x + 1 = 0$ qui est un naturel tandis que x ne l'est pas.

EXERCICE 13

Multiplication

1) Si l'on calcule le chiffre des unités du produit, on obtient $6 \times 8 = 48$ donc le chiffre des unités doit être 8 ce qui n'est pas le cas dans la valeur donnée.

2) 35×10^{14} et 48×10^{14} sont deux nombres commençant respectivement par 35 et 48 suivis par 14 zéros. Le nombre A possède donc 16 chiffres.

3) $A = (5 \times 10^7 + 6) \times (7 \times 10^7 + 8)$
$= 5 \times 7 \times 10^{14} + 5 \times 8 \times 10^7 + 6 \times 7 \times 10^7 + 6 \times 8$
$= 35 \times 10^{14} + (40 + 35) \times 10^7 + 48 = 35 \times 10^{14} + 75 \times 10^7 + 48$
$= 3\,500\,000\,750\,000\,048$

4) On trouve les produits suivants :

$48\,506 \times 505 = 24\,495\,530$ $\qquad$ $48\,506 \times 149 = 7\,227\,394$

$557 \times 505 = 281\,285$ $\qquad$ $557 \times 149 = 82\,993$

On a alors :

$$\begin{aligned} B &= (48\,506 \times 10^3 + 557)(505 \times 10^3 + 149) \\ &= 48\,506 \times 505 \times 10^6 + 48\,506 \times 149 \times 10^3 + 557 \times 505 \times 10^3 + 557 \times 149 \\ &= 24\,495\,530 \times 10^6 + 7\,227\,394 \times 10^3 + 281\,285 \times 10^3 + 82\,993 \end{aligned}$$

On a : $B = 24\,503\,038\,761\,993$

$$\begin{array}{lr} & 24\,495\,530\,000\,000 \\ + & 7\,227\,394\,000 \\ + & 281\,285\,000 \\ + & 82\,993 \\ \hline & 24\,503\,038\,761\,993 \end{array}$$

Exercice 14

Rationnels non décimaux

1) $\dfrac{1}{7}$ non décimal car 7 est premier.

$\dfrac{27}{8}$ décimal car $8 = 2^3$

$\dfrac{91}{7} = 13$ décimal car entier.

$\dfrac{42}{17}$ non décimal car 17 est premier.

2) a) $\dfrac{1}{7} = 0,\overline{142\,857}$

b) La période est de 6 chiffres, comme $32 = 6 \times 5 + 2$, pour trouver la 32ᵉ décimal, on prend 5 périodes puis le 2ᵉ chiffre de la période soit : 4

3) Le but de cette question est de produire l'écriture décimale périodique de $\dfrac{42}{17}$

a) La 20ᵉ décimal est 5.

b) $\dfrac{42}{17} = 2,\overline{470\,588\,235\,294\,117\,6}$

c) Comme on divise par 17 et que la division ne « *tombe pas juste* », il n'existe que 16 restes possibles. Après 17 divisions on obtient nécessairement un reste déjà obtenu.

4) a) $100\,a - a = 123,\overline{23} - 1,\overline{23} = 122$

b) On a : $99a = 122$ donc $a = \dfrac{122}{99}$