# Nombres premiers. Pgcd, ppcm - Correction

## EXERCICE 1

**Connaissance**

Voir le cours

## EXERCICE 2

**Histoire de billes**

Soit $a$ et $b$ les nombres de billes des deux enfants. On doit avoir : $ab = 285$

On décompose 285 en nombres premiers. On trouve : $285 = 3 \times 5 \times 19$

On cherche tous les diviseurs de 285 : $D_{285} = \{1, 3, 5, 15, 19, 57, 95, 285\}$

On obtient alors tous les couples solutions $(a, b)$

$$(1, 285)\ ,\ (3, 95)\ ,\ (5, 57)\ ,\ (15, 19)\ ,\ (19, 15)\ ,\ (57, 5)\ ,\ (95, 3)\ ,\ (285, 1)$$

## EXERCICE 3

**Sommes d'argent**

Pour limiter l'exposé des solutions, on pose : $S_1 < S_2 < S_3$.

On doit avoir : $S_1 \times S_2 \times S_3 = 2431$

On décompose 2431 en facteurs premiers : $2431 = 11 \times 13 \times 17$

On obtient alors les triplets solutions : $(S_1, S_2, S_3)$ :

$$(1, 11, 221)\ ,\ (1, 13, 187)\ ,\ (1, 17, 143)\ ,\ (11, 13, 17)$$

## EXERCICE 4

**Un entier naturel**

Voir cours.

## EXERCICE 5

**Nombres parfaits**

1) Les diviseurs de 6 sont : $D_6 = \{1, 2, 3, 6\}$, on a : $1 + 2 + 3 = 6$.

   6 est donc un nombre parfait.

   La décomposition de 496 est : $496 = 2^4 \times 31$. Les diviseurs de 496 sont :

$$D_{496} = \{1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124, 248, 496\}$$

   On a alors : $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248 = 496$

   496 est donc un nombre parfait.

2) La décomposition de 120 est : $120 = 2^3 \times 3 \times 5$. Les diviseurs de 120 sont :

$$D_{120} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120\}$$

On a : $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 8 + 10 + 12 + 15 + 20 + 24 + 30 + 40 + 60 = 240$

120 n'est pas un nombre parfait.

3) a) On peut remplir le tableau suivant :

| $n$ | $2^n(2^{n+1} - 1)$ | $2^{n+1} - 1$ | nbre parfait |
|---|---|---|---|
| 1 | $2 \times (4 - 1) = 6$ | 3 | oui |
| 2 | $4 \times (8 - 1) = 28$ | 7 | oui |
| 3 | $8 \times (16 - 1) = 120$ | 15 | non |
| 4 | $16 \times (32 - 1) = 496$ | 31 | oui |

On peut conjecturer au vu de ce tableau que si $2^{n+1} - 1$ est premier $N$ est parfait.

b) On teste les entiers $n$ à partir de 5 :
- $n = 5$, on a $2^{n+1} - 1 = 63$ qui n'est pas premier.
- $n = 6$, on a $2^{n+1} - 1 = 127$ qui est premier.

Donc le nombre parfait suivant est : $N = 2^6(2^{6+1} - 1) = 64 \times 127 = 8\,128$.

## EXERCICE 6

**Nombre avec trois diviseurs**

Les nombres de 1 chiffre qui possède 3 diviseurs sont : 4 et 9.
Leurs diviseurs sont respectivement : 1, 2, 4 et 1, 3, 9.

Comme 3 est premier, 3 ne se décompose pas. Le nombre de trois chiffres cherché $N$ ne possède donc qu'un seul facteur premier $p$.

On peut donc écrire : $N = p^\alpha$ avec $\alpha + 1 = 3$ soit $\alpha = 2$

$N$ est donc le carré d'un nombre premier. Il est compris entre 100 et 999.

Les facteurs premiers possibles sont : 11, 13, 17, 19, 23, 29 et 31.

Leurs carrés respectifs sont : 121, 169, 289, 361, 529, 841 et 961.

Les sommes de leurs chiffres respectives sont : 4, 16, 19, 10, 16, 13 et 16.

Il n'y qu'un seul nombre dont la somme des chiffres est 13 c'est : $N = 29^2 = 841$.

## EXERCICE 7

**Histoire de billes**

Soit $n$ le nombre de paquets. Comme les paquets possèdent le même nombre de billes rouges et de billes noires, $n$ divise 108 et 135. Le nombre maximum de paquets est obtenu avec le pgcd$(108, 135)$.
On détermine le pgcd$(108, 135)$ par l'algorithme d'Euclide :

$$\left.\begin{aligned} 135 &= 108 \times 1 + 27 \\ 108 &= 27 \times 4 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \text{pgcd}(108, 135) = 27$$

On a les décompositions $135 = 27 \times 5$ et $108 = 27 \times 4$.

Il y aura donc dans les 27 paquets 4 billes rouges et 5 billes noires.

## EXERCICE 8

**Fête d'école**

1) **Méthode algébrique.**

   Soit $x$ et $y$ les nombres respectifs de part de flan et de tarte aux pommes vendues.
   - 72 parts ont été vendues, on a : $x+y=72$
   - 122 € de recette donc : $1,5x+2y=122$,

   on obtient donc le système suivant :

$$\begin{cases} x+y=72 & (\times 2) \\ 1,5x+2y=122 & (\times -1) \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} 2x+2y=144 \\ -1,5x-2y=-122 \end{cases}$$

   par addition on obtient : $0,5x=22$ soit $x=44$

   En remplaçant dans la première équation, on a : $y=72-44=28$.

   On a vendu 44 parts de flan et 28 parts de tarte aux pommes.

2) **Raisonnement de type arithmétique.**

   Supposons que l'on a vendu autant de parts de flan que de parts de tarte.

   On obtient alors $\dfrac{72}{2}=36$ parts de chaque.

   La recette s'élève alors à : $1,5\times 36+2\times 36=126$ €, c'est à dire 4 € de trop.

   En permutant une part de tarte pour une part de flan, on diminue la recette de : $2-1,5=0,50$ €.

   Pour diminuer la recette de 4 € :
   on permute $\dfrac{4}{0,5}=8$ parts de tarte pour 8 parts de flan.

   Il y a donc $36+8=44$ parts de flan et $36-8=28$ parts de tarte.

## EXERCICE 9

**Le village de Centville**

1) **Résolution algébrique.**

   On pose $N=\overline{19ab}$ l'année de naissance de Pierre.

   Comme nous sommes en 2001, Pierre a donc : $(2001-\overline{19ab})$ ans.

   La somme des chiffres de son année de naissance est égal à son âge, on obtient donc :

$$\begin{aligned} 1+9+a+b &= 2001-\overline{19ab} \\ &= 2001-1900-10a-b \end{aligned}$$

   On a alors :

$$\begin{aligned} a + b + 10a + b &= 2001 - 1900 - 1 - 9 \\ 11a + 2b &= 91 \\ 11a &= 91 - 2b \end{aligned}$$

On sait que :

$$0 \leqslant b \leqslant 9 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant 2b \leqslant 18 \quad \Leftrightarrow \quad -18 \leqslant -2b \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad 73 \leqslant 91 - 2b \leqslant 91$$

On cherche les multiples de 11 compris entre 73 et 91. Il n'y a que 2 choix :

- $91 - 2b = 77$, soit $2b = 14$, on en déduit que $b = 7$ et $a = 7$
- $91 - 2b = 88$, soit $2b = 3$, ce qui est impossible car $b$ est un entier.

Conclusion : Pierre est né en 1977.

2) **Résolution arithmétique.**

a) La somme des chiffre de l'année de naissance de Pierre est maximale, si Pierre est né en 1999. La somme des chiffres est égal alors à :

$$1 + 9 + 9 + 9 = 28$$

Comme la somme des chiffres est égal à son année de naissance, Pierre a au maximum 28 ans.

b) Si Pierre a 28 ans, il est donc né en : $2001 - 28 = 1973$.
La somme des chiffres vaut $1 + 9 + 7 + 3 = 20$ soit 8 de moins.

Si son année de naissance progresse de 1, la somme des chiffres progresse de 1 et son âge diminue de 1.

- Pour 1974 la somme des chiffres vaut 21 et son âge est de 27 ans.
- Pour 1975 la somme des chiffres vaut 22 et son âge est de 26 ans.
- Pour 1976 la somme des chiffres vaut 23 et son âge est de 25 ans.
- Pour 1977 la somme des chiffres vaut 24 et son âge est de 24 ans.

On obtient bien 1997 comme année de naissance.

## EXERCICE 10

### Carrelage d'une pièce

1) a) Le nombre maximale de dalles que l'on peut poser dans la largeur de la pièce (en convertissant en cm) est :

$$\frac{418}{29} \approx 14,4$$

Comme on utilise que des dalles entières, on peut mettre au maximum 14 dalles dans la largeur.

b) Le nombre maximale de dalles que l'on peut poser dans la longueur de la pièce (en convertissant en cm) est :

$$\frac{567}{29} \approx 19,55$$

Comme on utilise que des dalles entières, on peut mettre au maximum 19 dalles dans la longueur.

c) Comme les joints entourent une dalle,
si l'on dispose $n$ dalles, on aura $(n+1)$, joints. En appliquant ce principe, calculons les épaisseurs $e_\ell$ et $e_L$ des joints respectivement dans la largeur et la longueur :

$$e_\ell = \frac{418 - 14 \times 29}{14+1} = 0,8$$

$$e_L = \frac{567 - 19 \times 29}{19+1} = 0,8$$

Les joints autour des dalles ont tous une largeur de 0,8 cm.

2) Calculons les nombres maximum $n_\ell$ et $n_L$ de dalles sans joint dans le sens de la largeur et de la longueur avec des dalles de 36 cm :

$$n_\ell = \frac{418}{36} \approx 11,6 \quad \text{et} \quad n_L = \frac{567}{36} = 15,75$$

Si l'on prend respectivement 11 et 15 dalles dans le sens de la largeur et de la longueur, on obtiendrait des épaisseurs de joints respectifs de :

$$e'_\ell = \frac{418 - 11 \times 36}{11+1} \approx 1,83$$

$$e'_L = \frac{567 - 15 \times 36}{15+1} \approx 1,69$$

Les joints étant trop épais, on est obligé de prendre 12 dalles dans le sens de la largeur et 16 dalles dans le sens de la longueur.

Le nombre de dalles nécessaires est donc de : $12 \times 16 = 192$.

3) Calculons les prix respectifs pour les deux modèles de dalles.

Pour le premier modèle, on a $14 \times 19 = 266$ dalles. On obtient alors le prix $P_1$ suivant :

$$P_1 = 266 \times 2,30 = 611,80 \text{ €}$$

Pour le deuxième modèle, on obtient le prix $P_2$ suivant :

$$P_2 = 192 \times 3,10 = 595,20 \text{ €}$$

Le deuxième modèle est donc plus avantageux.