Angles. Aires et périmètres - Correction

EXERCICE 1

Voir cours

EXERCICE 2

Voir cours

EXERCICE 3

1) a) Le périmètre augmente de 5 %.

   b) Si le côté augmente de 5 %, il est multiplié par 1,05. Son aire est alors multiplié par $(1,05)^2 = 1,1025$. Son aire augmente donc de 10,25 %.

2) a) Soit a et b les deux dimensions du rectangle.

   Le périmètre vaut $2p$ donc : $2(a+b) = 2p \Leftrightarrow a+b = p \Leftrightarrow b = p-a$.

   En remplaçant dans l'aire du rectangle : $\mathscr{S} = a \times b = a(p-a) = ap - a^2$

   Développons : $\dfrac{p^2}{4} - \left(a - \dfrac{p}{2}\right)^2 = \dfrac{p^2}{4} - a^2 + ap - \dfrac{p^2}{4} = ap - a^2$.

   Conclusion : $\mathscr{S} = \dfrac{p^2}{4} - \left(a - \dfrac{p}{2}\right)^2$.

   b) L'élément variable dans l'aire du rectangle est a. Pour rendre $\mathscr{S}$ maximale, il faut rendre maximal $\dfrac{p^2}{4} - \left(a - \dfrac{p}{2}\right)^2$ soit rendre minimal $\left(a - \dfrac{p}{2}\right)^2$. La plus petite valeur d'un carré est zéro qui est obtenue pour $a = \dfrac{p}{2}$.

   On obtient alors : $b = p - a = p - \dfrac{p}{2} = \dfrac{p}{2}$.

   Conclusion : Pour un périmètre donné, l'aire d'un rectangle est maximale lorsque $a = b$ soit pour un carré.

EXERCICE 4

Interstice de trois cercles.

Le côté a du triangle équilatéral ABC vaut deux fois le rayon donc $a = 2r$.

La hauteur h d'un triangle équilatéral vaut $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{2r\sqrt{3}}{2} = r\sqrt{3}$.

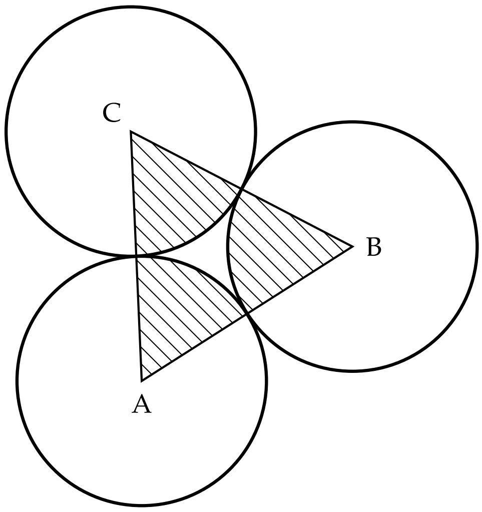
L'aire $\mathscr{A}_{\text{ABC}}$ du triangle ABC vaut alors : $\mathscr{A}_{\text{ABC}} = \dfrac{ah}{2} = \dfrac{2r \times r\sqrt{3}}{2} = r^2\sqrt{3}$.

Comme les angles d'un triangle équilatéral valent 60°, les trois secteurs angulaires hachurés correspondent à l'aire d'un demi-cercle ($60 \times 3 = 180$).

L'aire hachurée vaut donc : $\dfrac{\pi r^2}{2}$.

Par soustraction, on obtient l'aire de l'interstice $\mathscr{A}_{\text{interstice}}$ des trois cercles :

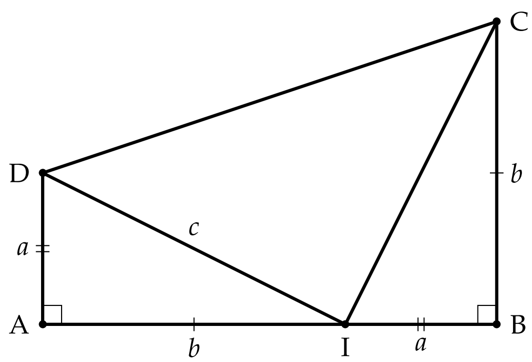
$$\mathscr{A}_{\text{interstice}} = r^2\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}r^2 = \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right) r^2 \approx 0,16\, r^2$$



EXERCICE 5

Démonstration du théorème de Pythagore.

1) On obtient la figure suivante :



$$\mathscr{A}_{\text{ABCS}} = \frac{(\text{Grd.base} + \text{Pte.base})\text{hauteur}}{2} = \frac{(a+b)^2}{2}.$$

2) Les triangles DAI et IBC sont deux triangles rectangles ayant deux côtés de même longueur AD = IB et AI = BC, ils sont donc isométriques donc superposables.
Les angles non droits, d'un triangles rectangle sont complémentaires et comme les triangles DAI et IBC sont isométriques, les angles $\widehat{\text{AID}}$ et $\widehat{\text{BIC}}$ sont complémentaires. On déduit alors :

$$\begin{cases} \widehat{\text{AID}} + \widehat{\text{BIC}} = 90° \\ \widehat{\text{AID}} + \widehat{\text{DIC}} + \widehat{\text{BIC}} = 180° \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \widehat{\text{DIC}} = 90°$$

3) Les triangles DAI et IBC sont isométriques donc DI = IC le triangle DIC est alors isocèle rectangle. On a :

$$\mathscr{A}_{\text{DIB}} = \frac{c^2}{2} \quad \text{et} \quad \mathscr{A}_{\text{DAI}} = \mathscr{A}_{\text{IBC}} = \frac{ab}{2}$$

On en déduit que : $\mathscr{A}_{\text{ABCD}} = \mathscr{A}_{\text{DIB}} + 2\mathscr{A}_{\text{IBC}} = \dfrac{c^2}{2} + ab$.

4) En égalisant les deux expressions de $\mathscr{A}_{\text{ABCD}}$ on obtient :

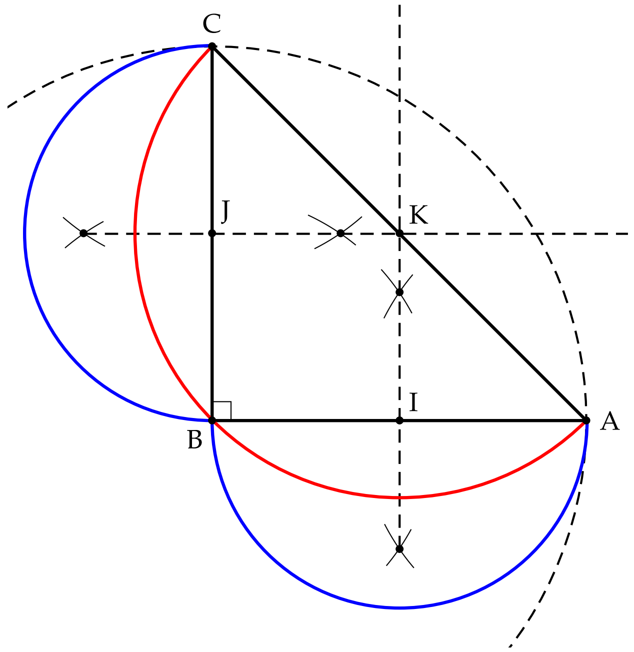
$$\frac{(a+b)^2}{2} = \frac{c^2}{2} + ab \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a^2}{2} + ab + \frac{b^2}{2} = \frac{c^2}{2} + ab \quad \Leftrightarrow \quad c^2 = a^2 + b^2$$

a, b et c sont les dimensions du triangle rectangle DAI et $c^2 = a^2 + b^2$. On retrouve ainsi le théorème de Pythagore.

Exercice 6

Lunules

1) Pour obtenir la figure de la lunule :
- On trace un segment [AB] d'une longueur quelconque.
- On trace le point C intersection du cercle de centre B et de rayon AB et de la perpendiculaire de (AB) passant par B.
- On trace les médiatrices de [AB] et [AC]. Elles se coupent en K, milieu du segment [BC]. Elles coupent respectivement les droites (AB) et (AC) en I et J.
- On trace les demi-cercles de centre respectifs I et J et de diamètres respectifs AB et AC.
- On trace enfin l'arc de cercle de centre K passant par les points C et A.



2) ABC est isocèle rectangle en B, d'après le théorème de Pythagore :

$$\text{BC}^2 = \text{AB}^2 + \text{AC}^2 \quad \Leftrightarrow \quad \text{BC}^2 = 2\text{AB}^2 \quad \Leftrightarrow \quad \text{AB}^2 = \frac{49}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \text{AB} = \frac{7}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$$

On pose :

- $\mathscr{A}_1$: aire des demi-cercles de centres I et J et de rayon $\dfrac{\text{AB}}{2} = \dfrac{7\sqrt{2}}{4}$.
- $\mathscr{A}_2$: aire du demi-cercle de centre K et de rayon $\dfrac{\text{BC}}{2} = \dfrac{7}{2}$.

- $\mathscr{A}_3$: aire du triangle isocèle rectangle ABC.

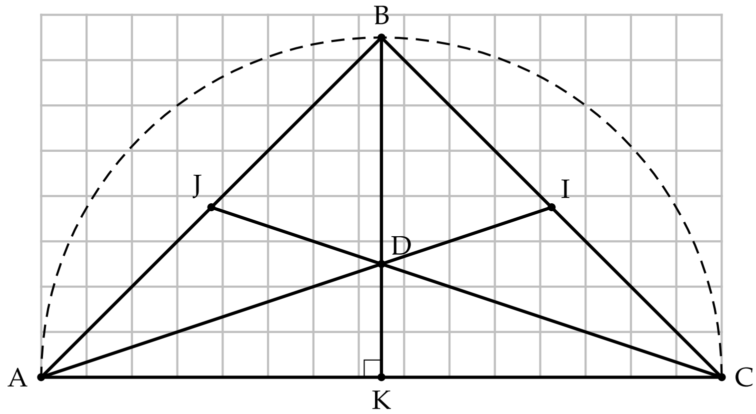
$$\mathscr{A}_{\text{grisée}} = 2\mathscr{A}_1 - (\mathscr{A}_2 - \mathscr{A}_1) = \pi\left(\frac{7\sqrt{2}}{4}\right)^2 - \frac{\pi}{2}\left(\frac{7}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{7\sqrt{2}}{2}\right)^2$$
$$= \frac{49\pi}{8} - \frac{49\pi}{8} + \frac{49}{4} = 12,25 \text{ cm}^2$$

Remarque : L'aire de la lunule d'Hippocrate est égale à l'aire du triangle.

Exercice 7

Aire dans un triangle.

1) On obtient la figure suivante :



2) a) $\mathscr{A}_{ABC} = \dfrac{1}{2}AC \times BK$

Le triangle ABC est isocèle en B, donc la médiane issue de B est aussi la hauteur et donc $K = m[AC]$. De plus ABC est rectangle en B donc le milieu de [AC] est le centre du cercle circonscrit. On a alors :

$$BK = AK = \frac{AC}{2} = \frac{15}{2}$$
$$\mathscr{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \times 15 \times \frac{15}{2} = \frac{225}{4} = 56,25 \text{ cm}^2$$

b) (AI) est la médiane issue de A, elle sépare l'aire de ABC en deux parties égales donc :

$$\mathscr{A}_{AIC} = \frac{1}{2}\mathscr{A}_{ABC} = \frac{225}{8} = 28,125 \text{ cm}^2$$

3) a) D est l'intersection des deux médianes (AI) et (CJ). Or les trois médianes dans un triangles sont concourantes, donc D est aussi sur la troisième médianes (BK). Les points B, D et K sont donc alignés.

b) D est le centre de gravité du triangle ABC, donc : $DK = \dfrac{1}{3}BK = \dfrac{15}{6} = \dfrac{5}{2}$.

c) $\mathscr{A}_{ADC} = \dfrac{1}{2} \times AC \times DK = \dfrac{1}{2} \times 15 \times \dfrac{5}{2} = \dfrac{75}{4}$.

d) $\mathscr{A}_{ABCD} = \mathscr{A}_{ABC} - \mathscr{A}_{ADC} = \dfrac{225}{4} - \dfrac{75}{4} = \dfrac{150}{4} = 37,5 \text{ cm}^2$

EXERCICE 8

Aire dans un triangle bis.

Partie A

1) La médiane (BN) sépare le triangle BMA en deux triangles BMN et BNA. Ces deux triangle ont pour base [MN] et [NA] de même longueur. De plus ils ont la même hauteur, donc ces deux triangles ont la même aire.

2) N est le milieu de [AM] donc (BN) est la médiane de BAM. Les triangles BMN et BNA ont donc la même aire . De même pour les triangles MCN et CNA. La surface hachurée a donc la même aire que la surface blanche.

Partie B

1) $$\begin{aligned}\mathscr{A}_{\text{partie grisée}} &= \mathscr{A}_{\text{EDMF}} + \mathscr{A}_{\text{FGBH}} \\ &= x^2 + (8-x)(20-x) \\ &= x^2 + 160 - 8x - 20x + x^2. \\ &= 2x^2 - 28x + 160\end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned}2(x-7)^2 + 62 &= 2(x^2 - 14x + 49) + 62 = 2x^2 - 28x + 98 + 62 \\ &= 2x^2 - 28x + 160\end{aligned}$$

3) Pour minimiser cette surface, il faut minimiser le carré $(x-7)^2$, c'est à dire pour $x = 7$.

4) Il faut donc résoudre :

$$\begin{aligned}2(x-7)^2 + 62 &= 112 \\ 2(x-7)^2 &= 112 - 62 \\ 2(x-7)^2 &= 50 \\ (x-7)^2 &= 25\end{aligned}$$

on obtient donc les deux égalités suivantes

$$\begin{aligned} x - 7 = 5 \quad &\text{ou} \quad x - 7 = -5 \\ x = 12 \quad &\text{ou} \quad x = 2\end{aligned}$$

La solution $x = 12$ étant impossible car $x \leqslant 8$, la solution est donc $x = 2$.