Solides et patrons - Correction

EXERCICE 1

Voir cours

EXERCICE 2

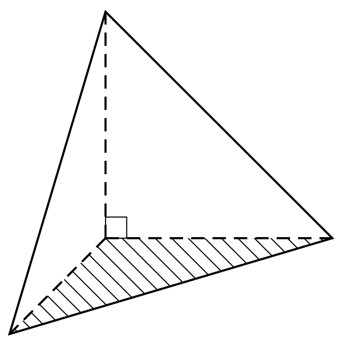
Nombre de sommets, faces et arêtes.

1) • Sommets : chaque coin découpé donne 3 sommets donc : $S = 6 \times 3 = 18$.
   • Arêtes : chaque coin découpé donne 3 arêtes auquel on rajoute les 12 arêtes du cube donc $C = 3 \times 6 + 12 = 30$.

   On a alors : $S - C + F = 18 - 30 + 14 = 2$.

   Remarque : Il s'agit de la formule d'Euler.

2) Les coins découpés sont des tétraèdres dont la base est un triangle rectangle isocèle et dont les côtés de l'angle droit ainsi que la hauteur ont pour longueur $\dfrac{a}{2}$.



$$V_{\text{coin}} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{a}{2}\right)^2 \times \frac{a}{2} = \frac{a^3}{24}$$

Les huit coins ont comme volume :

$V_1 = 8 \times \dfrac{a^3}{24} = \dfrac{a^3}{3}$

Par soustraction, le volume restant : $V_2 = a^3 - \dfrac{a^3}{3} = \dfrac{2a^3}{3}$.

Le volume restant est donc deux fois plus grand que le volume découpé.

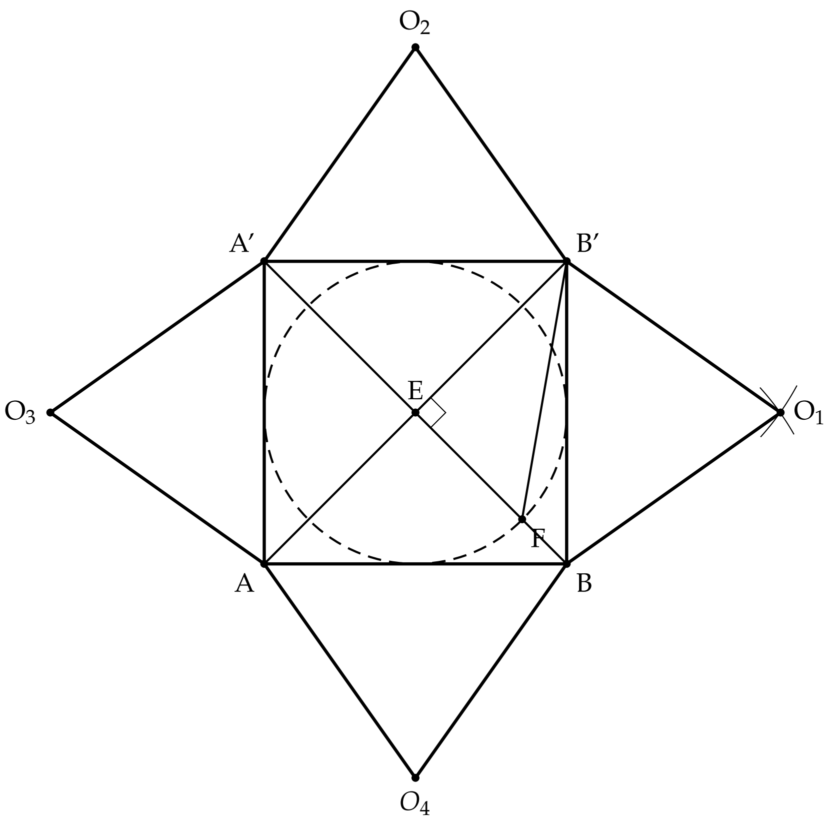
EXERCICE 3

Patron d'une pyramide

1) Les arêtes latérales valent la moitié de la diagonale du cube. Pour trouver cette longueur, on construit un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit valent respectivement la moitié d'un côté (2) et la moitié de la diagonale d'une face ($2\sqrt{2}$). Cela correspond à la longueur B′F sur le patron. D'après le théorème de Pythagore :

$$\text{B'F}^2 = \text{EF}^2 + \text{EB'}^2 = 2^2 + (2\sqrt{2})^2 = 4 + 8 = 12 \quad \Rightarrow \quad \text{B'F} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

On obtient alors le patron suivant :



2) Le cube est constitué de 6 pyramides identiques à OABB′A′, on en déduit que :

$$V_{\text{OABB'A'}} = \frac{4^3}{6} = \frac{32}{3} \approx 10,667 \text{ cm}^3$$

Exercice 4

Faces d'un cube

1) Les trois faces cachées sont :
   - Face DCGH : hachurée
   - Face DAEH : grisée
   - Face ABCD : pointée

2) La série des trois motifs doit se reproduire 2 fois dans le même ordre. Seuls les patrons 2 et 3 correspondent au cube ABCDHEFG.

3) a) On obtient : $3^3 = 27$ petits cubes.

   b) Comme il y a 27 petits cubes leur volume vaut : $\dfrac{216}{27} = 8 \text{ cm}^3$.

   c) On a $8 = 2^3$ donc l'arête d'un petit cube vaut 2 cm.

   L'arête du grand cube vaut alors : $3 \times 2 = 6$ cm.

4) a) On obtient le tableau suivant :

Nombre de faces décorées	0	1	2	3	4	5	6
Nombres de petits cubes	1	6	12	8	0	0	0

b) Il y a : $6 \times 1 + 12 \times 2 + 8 \times 3 = 54$ faces décorées.

5) a) Soit V le volume de ce solide : $V = (27 - 8) \times 2^3 = 152 \text{ cm}^3$

b) il y a 6 croix constituées de 4 petits carrés de 2 cm plus les 8 renfoncements dû à l'absence des 8 coins comportant chacun 3 petits carrés de 2 cm. L'aire $\mathscr{A}$ de ce solide vaut :

$$\mathscr{A} = 6 \times 4 \times 2^2 + 8 \times 3 \times 2^2 = 192 \text{ cm}^2$$

EXERCICE 5

Pyramides

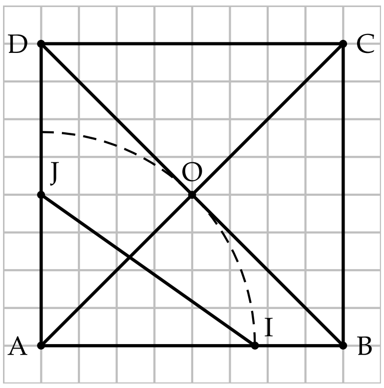
1) a) La longueur OA correspond à la moitié de la diagonale d'un carré de côté 4, donc $\text{OA} = 2\sqrt{2}$.

Dans le triangle OSA rectangle en O, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$SA^2 = OA^2 + OS^2 = (2\sqrt{2})^2 + 2^2 = 8 + 4 = 12 \quad \Rightarrow \quad SA = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

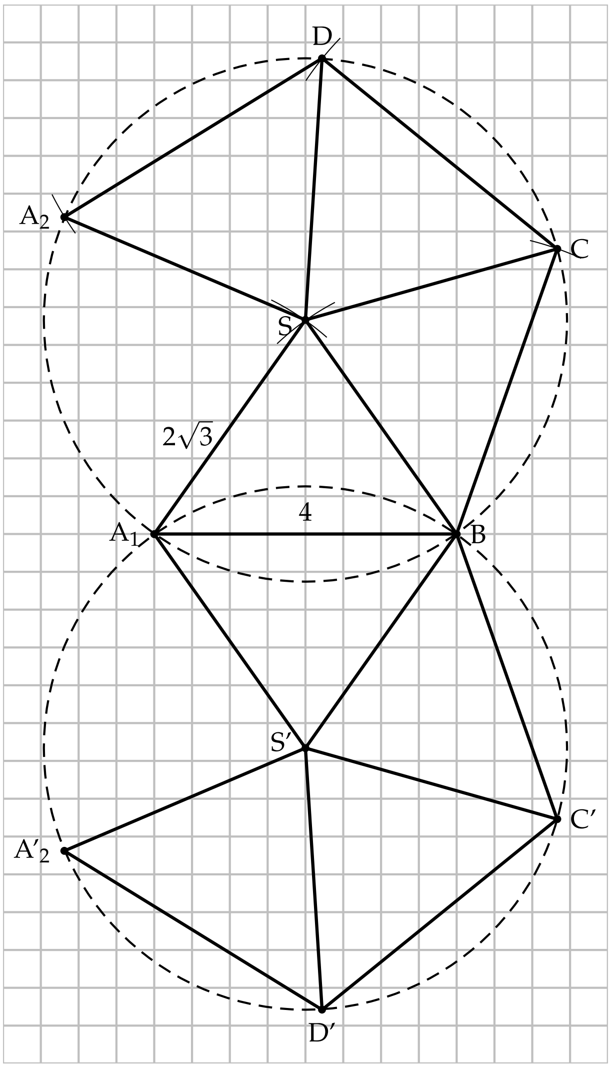
Du fait de la symétrie de la pyramide, le triangle SAB est isocèle en S.

b) On peut proposer la construction suivante : il faut construire un triangle rectangle dont le côtés de l'angle droit valent respectivement la moitié de la diagonale et la moitié du côté d'un carré de côté 4 cm. Le côté IJ correspond à la longueur SA.



2) On obtient le patron suivant : on reprend la longueur $\text{IJ} = 2\sqrt{3}$ correspondant à la longueur de l'arête latérale d'une pyramide. On construit le triangle isocèle A_1BS. On trace ensuite le cercle de centre S et de rayon $2\sqrt{3}$, on reporte 3 fois la longueur AB à partir de B. On obtient alors les points C, D et A_2.

Par symétrie orthogonale par rapport à (A_1B), on obtient les points de la deuxième pyramide S′, C′, D′ et A'_2.



3) a) Soit V le volume obtenu :

$$V = V_{\text{cube}} + 2V_{\text{pyramide}} = 4^3 + 2 \times \frac{1}{3} \times 4^2 \times 2 = 64 + \frac{64}{3} = \frac{256}{3} \approx 85,33\ \text{cm}^3$$

b) i) O est le milieu de [SI] car OS = OI = =2.

O′ est le milieu de [IS′] car IO′ = O′S′ = 2.

De plus comme $\text{J} = m[\text{BC}]$, on a alors :

$$\left.\begin{array}{l} \text{O} = m[\text{SI}] \\ (\text{OJ}) \perp (\text{SI}) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \quad \text{(OJ) est la médiatrice de [SI])}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{O}' = m[\text{IS}'] \\ (\text{O}'\text{J}) \perp (\text{IS}') \end{array}\right\} \Leftrightarrow \quad \text{(O'J) est la médiatrice de [IS')]}$$

Dans le triangle SIS′, J est l'intersection des médiatrices de [SI] et [IS′]. Comme le triangle SIS′ est rectangle en I, l'intersection des médiatrices se trouve au milieu de l'hypoténuse. On en déduit que J est le milieu de [SS′]. L'angle $\widehat{\text{SJS}'}$ est alors plat.

ii) S, J et S′ étant alignés, les points S, B, S′ et C sont coplanaires. Les arêtes latérales des pyramides ont même longueur donc SB = BS′ = S′C = CS. Le quadrilatère SBS′C est un losange.

EXERCICE 6

Flacon de parfum

1) On somme les pavés droits donne le volume :

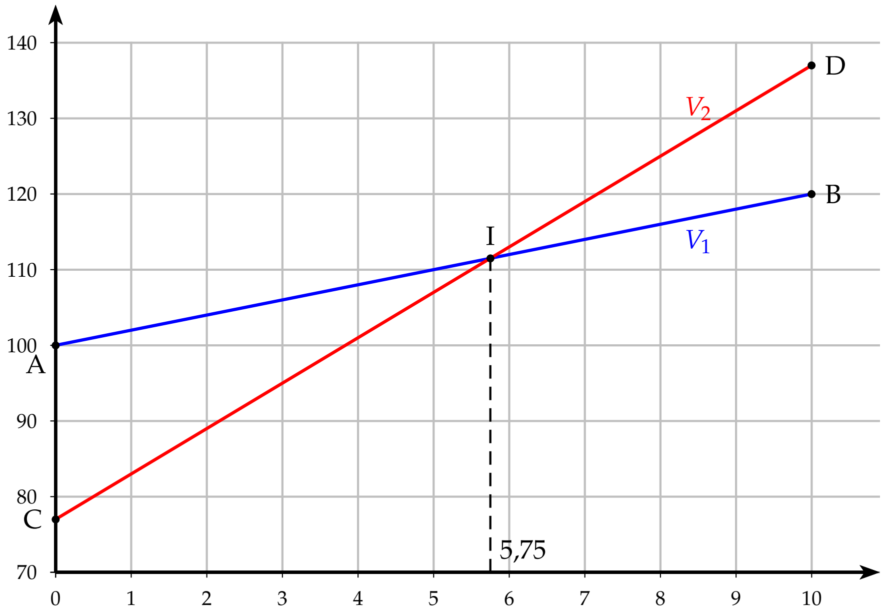
$$V_1 = 5 \times 4 \times 5 + 1 \times x \times 2 = 100 + 2x$$

2) Le volume V_2 est la la somme du tronc de pyramide plus du pavé droit. Le volume du tronc de pyramide étant la différence entre les deux pyramides.

$$\begin{aligned} V_2 &= V_{\text{SABCD}} - V_{\text{SEFGH}} + V_{\text{pavé}} \\ &= \frac{1}{3} \times \text{AB} \times \text{BC} \times \text{OS} - \frac{1}{3} \times \text{EF} \times \text{FG} \times \text{O'S} + 3 \times 2 \times x \\ &= \frac{1}{3} \times 6 \times 4 \times 11 - \frac{1}{3} \times 3 \times 2 \times 5,5 + 6x \\ &= 88 - 11 + 6x = 6x + 77 \end{aligned}$$

3) Dans un repère orthogonal du plan :

a) On obtient le graphique suivant :



Pour tracer les deux fonctions affines, il suffit de déterminer les points extrèmes

$$V_1(0) = 100 \quad \text{et} \quad V_1(10) = 120$$
$$V_2(0) = 77 \quad \text{et} \quad V_2(10) = 137$$

ce qui donne les points A$(0\,;\,100)$, B$(10\,;\,120)$, C$(0\,;\,77)$, D$(10\,;\,137)$.

b) Graphiquement, on trouve $x \approx 5,8$

c) $V_1(x) = V_2(x) \quad \Leftrightarrow \quad 2x + 100 = 6x + 77 \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 6x = -100 + 77 \quad \Leftrightarrow$

$-4x = -23 \quad \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{23}{4} = 5,75$ cm

d) On peut utiliser indifféremment les deux expressions.

$$V_1(5,75) = 11,5 + 100 = 111,5 \text{ cm}^3 = 11,15 \text{ cl}$$

EXERCICE 7

Bougie

1) a) Dans le triangle SAB rectangle en A, appliquons le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned}
&\text{SB}^2 = \text{AB}^2 + \text{AS}^2 \\
&\text{AS}^2 = \text{SB}^2 - \text{AB}^2 = 21^2 - 14^2 = 245 \\
&\text{AS} = \sqrt{245} = 7\sqrt{5} \\
&\text{AS} \simeq 15,7 \text{ cm}
\end{aligned}$$

b) $V_{\text{bougie}} = \dfrac{1}{3} \times \pi \times \text{AB}^2 \times \text{AS} = \dfrac{1}{3} \times \pi \times 196 \times 7\sqrt{5} = \dfrac{1372\pi\sqrt{5}}{3}$

$\approx 3\,212{,}689 \text{ cm}^3$

c) On a $20\ \ell = 20 \text{ dm}^3 = 20\,000 \text{ cm}^3$

Donc le nombre de bougies avec 20 litres de cire : $N \approx \dfrac{20\,000}{3\,212{,}689} \approx 6,2$

On peut donc faire 6 bougies avec 20 litres de cire.

2) a) La longueur de l'arc(BB′) correspond à la longueur du cercle de base de rayon 14 cm.

$$\text{arc(BB}') = 2 \times \pi \times \text{AB} = 28\pi$$

b) L'angle α est proportionnel à la longueur de l'arc. La longueur du cercle complet est égal à $2 \times \pi \times \text{SB} = 42\pi$ et correspond à 360°, donc l'angle α :

$$\alpha = \frac{28\pi}{42\pi} \times 360 = \frac{4}{6} \times 360 = 240^\circ$$

3) Comme on remplit de cire blanche à mi hauteur, le coefficient de réduction k du cône vaut $k = \dfrac{1}{2}$. Le volume du cône de cire blanche est multiplié par k^3.

La proportion de cire blanche sur le volume total est : $k^3 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{8}$.