

LES MATRICES

1 Définitions

1.1 Matrice

Définition 1 Une matrice $m \times n$ est un tableau de nombres à **m** lignes et **n** colonnes. Les nombres qui composent la matrice sont appelés les éléments de la matrice (ou aussi les coefficients). Une matrice à m lignes et n colonnes est dite matrice **d'ordre** (m, n) ou de **dimension** $m \times n$. L'ensemble des matrices à m lignes et n colonnes à coefficients réels se note $M_{m,n}(\mathbb{R})$.

Notations :

- Les coefficients s'écrivent sans "séparation" verticale ou horizontale contrairement aux tableaux que vous connaissez. La matrice est "encadrée" par des parenthèses (ou des crochets dans certains exercices).
- Si A est une matrice de dimension $m \times n$, on note généralement a_{ij} le coefficient qui se trouve à la $i^{\text{ème}}$ ligne et dans la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice, où $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$.

Exemple 1

$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$, est une matrice de 3 lignes et 4 colonnes.

$A \in M_{3,4}(\mathbb{R})$, et on a : $a_{13} = -1$ et $a_{31} = \sqrt{2}$.

Cas particuliers :

- Une matrice A dont tous les éléments sont nuls est appelée matrice nulle :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

- Une matrice ne contenant qu'une ligne (matrice $1 \times n$) est appelée matrice-ligne, ou encore vecteur-ligne.
- Une matrice ne contenant qu'une colonne (matrice $m \times 1$) est appelée matrice-colonne, ou encore vecteur-colonne.
- Une matrice ayant le même nombre de lignes et de colonnes (matrice $m \times m$) est appelée matrice carrée. L'ensemble des matrices carrées d'ordre m à coefficients réels se note $M_{m,m}(\mathbb{R})$ ou plus simplement $M_m(\mathbb{R})$.

1.2 Matrice carrée

- Dans une matrice carrée, la diagonale est constituée des éléments situés sur la diagonale de la matrice.

Soit $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & -7 & 0 \\ \sqrt{5} & 0 & -2 \end{pmatrix}$, la diagonale de B est la suite des éléments en gras.

- Une matrice carrée dont tous les éléments en dehors de la diagonale sont nuls (certains éléments de la diagonale peuvent aussi être nuls) est appelée **matrice diagonale**.

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ est une } \mathbf{matrice diagonale}.$$

Définition 2 On appelle matrice identité d'ordre n , la matrice carrée dont les éléments de la diagonale sont égaux à 1 et tous les autres sont égaux à 0. on la note I_n .

Exemple 2

$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ est la } \mathbf{matrice identité} \text{ d'ordre } 4.$$

1.3 Transposée d'une matrice

Définition 3 Soit M une matrice $m \times n$. La transposée de la matrice M est la matrice $n \times m$ notée ${}^T M$ dont les lignes sont les colonnes de M et les colonnes sont les lignes de M .

Exemple 3

Soit D la matrice $\begin{pmatrix} 4 & 6 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

La transposée de D est la matrice : ${}^T D = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$${}^T \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 5 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -7 \end{pmatrix}$$

1.4 Égalité de deux matrices

Définition 4 Soit A et B deux matrices ayant le même nombre de lignes et de colonnes, c'est à dire la même dimension, on dit que $A = B$ si tous les éléments de A sont égaux aux éléments correspondants de B .

Exemple 4

On donne : $E = \begin{pmatrix} 2x + 3 & 5 \\ 3 & -2y - 4 \end{pmatrix}$ et $F = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

Déterminons x et y pour que les deux matrices E et F soient égales.

$$E = F \iff \begin{cases} 2x + 3 = -1 \\ -2y - 4 = 5 \end{cases}, \text{ ce qui se produit si et seulement si } \begin{cases} x = -2 \\ y = -\frac{9}{2} \end{cases}$$

2 Opérations élémentaires

2.1 Addition de matrices

Définition 5 Soit M et N deux matrices ayant le même nombre de lignes et de colonnes. La somme des matrices M et N est la matrice de même dimension que M et N , dont chaque élément est la somme des éléments correspondants de M et N .

Exemple 5

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & -8 \end{pmatrix}$$

2.2 Multiplication par un réel

Définition 6 Soit M une matrice quelconque et λ un réel. Le produit de M par λ est la matrice de même dimension que M et dont chaque élément est le produit de λ par l'élément correspondant de M .

Exemple 6

$$\text{Soit } M = \begin{pmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{pmatrix} \text{ et } \lambda \in \mathfrak{R} \text{ alors : } \lambda M = \begin{pmatrix} 4\lambda & a\lambda \\ b\lambda & -\lambda \end{pmatrix}$$

Remarque 1. En prenant $\lambda = -1$, on peut définir la matrice opposée d'une matrice A . C'est la matrice $(-1) \times A$ qu'on note aussi $-A$. De même, on définit la soustraction de deux matrices A et B : $A - B = A + (-1) \times B$.

Exemple 7

Soit A et B les matrices définies par : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$.

L'opposée de B est $-B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ et la différence de A et B est : $A - B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$.

2.3 Propriétés

On admettra les propriétés suivantes :

Soit A, B et C , trois matrices ayant la même dimension, λ et λ' deux réels.

$$A + B = B + A \quad \text{qui caractérise la commutativité de l'addition matricielle}$$

$$(A + B) = A + (B + C) \quad \text{qui caractérise l'associativité de l'addition matricielle}$$

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$$

$$(\lambda + \lambda')A = \lambda A + \lambda' A$$

$$\lambda(\lambda' A) = (\lambda \lambda') A$$

Exemple 8

On donne $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Soit X une matrice 2×2 telle que $2X + 3A = B$. Déterminer la matrice X .

En utilisant la remarque 1 du 2.2 : $2X = B - 3A$. En multipliant les matrices $2X$ et $B - 3A$ par $\frac{1}{2}$, on obtient : $X = \frac{1}{2}(B - 3A)$.

On obtient donc : $X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. Finalement : $X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

3 Produit de matrices

3.1 Produit d'une matrice par un vecteur-colonne (par une matrice $m \times n$)

On peut effectuer le produit d'une matrice à n colonnes (quelque soit le nombre m de lignes) par un vecteur-colonne à n lignes. Le résultat est alors un vecteur-colonne à m lignes.

Exemple 9

Soit une matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 \\ -1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ et un vecteur-colonne $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Le produit AV est le vecteur-colonne : $AV = \begin{pmatrix} 2x + 4y - 5z \\ -x + 6y + 3z \end{pmatrix}$

Exemple 10

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 1 + 0 \times (-2) + (-3) \times 3 \\ (-2) \times 1 + 1 \times (-2) + 3 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

3.2 Produit d'un vecteur-ligne (matrice $1 \times m$) par une matrice

On peut effectuer le produit d'un vecteur-ligne à m colonnes par une matrice à m lignes (quelque soit le nombre n de colonnes). Le résultat est alors un vecteur ligne à n colonnes.

Exemple 11

$$(1 \quad -2 \quad 4) \times \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = (1 \times 3 + (-2) \times 2 + 4 \times (-2) \quad 1 \times (-1) + (-2) \times 0 + 4 \times 4) = (-9 \quad 15)$$

3.3 Produit matriciel

Soit A une matrice $m \times p$ et B une matrice $p \times n$. On peut effectuer le produit d'une matrice à m lignes et p colonnes par une matrice à p lignes et n colonnes. On appelle produit $A \times B$ la matrice de dimension $m \times n$ obtenue en multipliant chaque ligne de A par chaque colonne de B . Plus précisément, le coefficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne de $A \times B$ est obtenu en multipliant la $i^{\text{ème}}$ ligne de A par la $j^{\text{ème}}$ colonne de B .

$$A \in M_{m,p}(\mathbb{R}), B \in M_{p,n}(\mathbb{R}) \implies C = A \times B \in M_{m,n}(\mathbb{R}) \text{ et } c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} \times b_{kj}$$

Exemple 12

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Calculons $C = A \times B$

$$\begin{aligned} A \times B &= \begin{pmatrix} 2 \times 2 + 1 \times 1 & 2 \times 4 + 1 \times (-2) & 2 \times 6 + 1 \times 3 & 2 \times (-1) + 1 \times 5 \\ 4 \times 2 + 3 \times 1 & 4 \times 4 + 3 \times (-2) & 4 \times 6 + 3 \times 3 & 4 \times (-1) + 3 \times 5 \\ (-1) \times 2 + (-2) \times 1 & (-1) \times 4 + (-2) \times (-2) & (-1) \times 6 + (-2) \times 3 & (-1) \times (-1) + (-2) \times 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 6 & 15 & 3 \\ 11 & 10 & 33 & 11 \\ -4 & 0 & -12 & -9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Il faut que A ait autant de colonnes que B de lignes pour que la calcul soit possible. Dans ce cas, le produit $A \times B$ a autant de lignes que A et autant de colonnes que B.

La matrice C a 3 lignes comme A et 4 colonnes comme B .

Remarque 2. Le produit de matrices n'est pas commutatif, c'est à dire que si A et B sont deux matrices quelconques, en général $A \times B \neq B \times A$. En effet, le nombre de lignes et de colonnes des matrices A et B peuvent permettre d'effectuer le produit AB mais pas nécessairement le produit BA . De plus, même dans le cas où les deux produits existent, généralement AB n'est pas égal à BA .

Exemple 13

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

On peut faire le produit $A \times B$ car le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B . Par contre on ne peut pas faire le produit $B \times A$ car le nombre de colonnes de B n'est pas égal au nombre de lignes de A .

Exemple 14

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Cette fois-ci, contrairement à l'exemple précédent, les deux produits $A \times B$ et $B \times A$ sont définis :

$$\begin{aligned} A \times B &= \begin{pmatrix} 2 \times (-1) + (-1) \times 2 & 2 \times 1 + (-1) \times 3 \\ 0 \times (-1) + 3 \times 2 & 0 \times 1 + 3 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \text{ et} \\ B \times A &= \begin{pmatrix} (-1) \times 2 + 1 \times 0 & (-1) \times (-1) + 1 \times 3 \\ 2 \times 2 + 3 \times 0 & 2 \times (-1) + 3 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nous voyons bien que le produit matriciel n'est pas commutatif : $A \times B \neq B \times A$

Remarque 3.

- La matrice identité joue pour le produit matriciel un rôle similaire au nombre 1 pour le produit des nombres réels.
- En supposant que les dimensions permettent le produit, on a $A \times I_n = I_n \times A = A$.

3.4 Propriétés

On admettra les propriétés suivantes :

Soit A, B et C , trois matrices réelles ; si les opérations indiquées existent, alors on admettra les égalités suivantes :

$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C \quad \text{distributivité à gauche de la multiplication des matrices sur l'addition}$$

$$(A + B) \times C = A \times C + B \times C \quad \text{distributivité à droite de la multiplication des matrices sur l'addition}$$

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C \quad \text{associativité de la multiplication}$$

Exemple 15

On considère les matrices : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

– $A \times B$ est une matrice de dimension 3×2 de même que $A \times C$. Il s'en suit que $A \times B + A \times C$ est une matrice de dimension 3×2 .

– $B + C$ est une matrice de dimension 2×2 donc $A \times (B + C)$ est une matrice de dimension 3×2 .

$$A \times (B + C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Définition 7 Soit A une matrice carrée d'ordre n . Soit p un entier naturel non nul. On note A^p la matrice définie par : $A^p = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{p \text{ fois la matrice } A}$

Attention!!! Le calcul de A^2 , par exemple, ne consiste pas à élever les éléments de A au carré!

Exemple 16

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. On a alors : $A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1^2 & 2^2 \\ 3^2 & 4^2 \end{pmatrix}$

4 Matrices inversibles

Définition 8 Soit A une matrice carrée d'ordre n . On dit que la matrice A est inversible s'il existe une matrice carrée B d'ordre n telle que : $A \times B = I_n$

Remarque 4. On admet sous les hypothèses précédentes que $A \times B = B \times A = I_n$.

4.1 Propriété

Soit A une matrice carrée d'ordre n . S'il existe une matrice carrée B d'ordre n telle que $A \times B = I_n$, alors B est unique. B est appelée **l'inverse de la matrice A** et se note A^{-1} .

Exemple 17

Soit les matrices 2×2 : $E = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ et $F = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

On souhaite montrer que E est inversible d'inverse F. On calcule le produit $E \times F$ qui est une matrice de dimension 2×2 .

$$E \times F = \begin{pmatrix} 1 \times 4 + 3 \times (-1) & 1 \times (-3) + 3 \times 1 \\ 1 \times 4 + 4 \times (-1) & 1 \times (-3) + 4 \times 1 \end{pmatrix}$$

$$E \times F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

La matrice E est donc inversible d'inverse F. On note $E^{-1} = F = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Remarque 5. Une matrice carrée non inversible est appelée *matrice singulière*.

5 Écriture matricielle d'un système d'équations linéaires

Exemple 18

Soit (S) le système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 5x + 7y = -3 \end{cases}$$

Si on pose $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, le système (S) peut s'écrire : $A \times X = B$

5.1 Propriété (admise)

A est une matrice carrée qui admet une matrice inverse A^{-1} . Le système d'équations linéaires dont l'écriture matricielle est $A \times X = B$ admet une solution unique ; elle s'obtient en calculant $X = A^{-1} \times B$

Remarque 6. Attention !!! Ne pas confondre $A^{-1} \times B$ et $B \times A^{-1}$ qui en général ne sont pas égales. Le produit matriciel **n'est pas commutatif** sauf pour deux matrices inverses l'une de l'autre.

5.2 Propriété (admise)

Dans le cas d'une matrice 2×2 : La matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si, et seulement si : $ad - bc \neq 0$