Introduction

Soit un pays fictif sans échanges extérieurs, dont l'économie très simplifiée se décompose en deux branches seulement : l'agriculture et l'industrie.

L'agriculture : la production est de 500 000 € répartie en *consommations intermédiaires* :
∗ 200 000€ consommés par l'industrie (industrie agro-alimentaire,.....)
∗ 50 000€ consommés par l'agriculture elle-même (engrais verts,....)
et le reste en *demande finale*, soit 250 000 €, disponible pour satisfaire les besoins de la population.
L'industrie : la production est de 2 500 000 € répartie en *consommations intermédiaires* :
∗ 150 000€ consommés par l'agriculture (engrais chimiques, énergie, machines,.....)
∗ 550 000€ consommés par l'industrie elle-même (énergie, machines,....)
et le reste en *demande finale*, soit 1 800 000 €, disponible pour satisfaire les besoins de la population.

1. Donner le vecteur colonne P des productions totales.

Solution: Le vecteur colonne **P** des productions totales est : $\begin{pmatrix} 500000 \\ 2500000 \end{pmatrix}$

2. Donner le vecteur colonne D_F des demandes finales.

Solution: Le vecteur colonne D_F des productions totales est : $\begin{pmatrix} 250000 \\ 1800000 \end{pmatrix}$

3. Compléter le tableau d'échanges inter-branches : le nombre inscrit à l'intersection de la ligne i et de la colonne j est la partie de la production de la branche i, consommée par la branche j.

Solution:

	consommation de l'agriculture	consommation de l'industrie
produit agricole	50 000	200 000
produit industriel	150 000	550 000

4. La matrice des coefficients techniques est définie de la manière suivante :

$$c_{ij} = \frac{\text{consommation intermédiaire de produit } i \text{ par la branche } j}{\text{production de la branche } j}$$

La matrice des coefficients techniques est donc de la forme :

$$C = \begin{pmatrix} \cdots\cdots & \frac{200000}{2500000} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{pmatrix}$$

où 200 000 € est la consommation en produit agricole par l'industrie et où 2 500 000 € est la production de l'industrie.
Compléter la matrice C et en donner une forme simplifiée.

Solution: $C = \begin{pmatrix} \frac{50000}{500000} & \frac{200000}{2500000} \\ \frac{150000}{500000} & \frac{550000}{2500000} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{2}{25} \\ \frac{3}{10} & \frac{55}{250} \end{pmatrix}$

5. Calculer le produit $C \times P$. Que retrouve t-on ?

Solution: $C \times P = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{2}{25} \\ \frac{3}{10} & \frac{55}{250} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 500000 \\ 2500000 \end{pmatrix}$

$C \times P = \begin{pmatrix} 50000 + 200000 \\ 150000 + 550000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 250000 \\ 700000 \end{pmatrix}$

On retrouve $C \times P = \begin{pmatrix} \text{consommations intermédiaires de l'agriculture} \\ \text{consommations intermédiaires de l'industrie} \end{pmatrix}$

Appelons C_I ce vecteur colonne des consommations intermédiaires par secteur.

6. En admettant que :

"production totale=consommations intermédiaires +demandes finales"

justifier l'égalité suivante : $(I_2 - C) \times P = D_F$.

On appelle **matrice de Leontief** la matrice $\mathbf{L=I_2\text{-}C}$.

Solution: En admettant que "production totale=consommations intermédiaires +demandes finales", on a : $P = C_I + D_F$. C'est à dire : $P - C_I = D_F$. Ors nous venons de voir dans la question précédente que : $C \times P = D_F$. On a donc : $P - C \times P = D_F \iff (I_2 - C) \times P = D_F$

Modèle input-output de Leontief

On donne dans la feuille Excel, la représentation de l'économie américaine en 1947, condensée en 4 secteurs (85 secteurs à l'origine). Cette économie est présentée sous forme d'un tableau d'échanges (*input-output table*) avec les consommations intermédiaires par secteur.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1			CONSOMMATIONS INTERMEDIAIRES					
2			**Agriculture**	**Industrie**	**Services**	**Gvts et autres**	**Demande finale**	**Production Totale**
3	PRODUCTION	**Agriculture**	15 285	25 838	168	111		
4		**Industrie**	10 093	141 963	10763	5 077		
5		**Services**	380	9 318	2 109	341		
6		**Gouvernement et autres**	51	9 634	1081	114		
7		**Total**						
8		**Valeur ajoutée**						

Les données fournies sont exprimées en millions de dollars de 1947.
(*Source :U.S.Bureau of Economic Analysis)*

Partie 1 :Exploitation du tableau

1. Donner la signification des éléments repérés en rouge dans le tableau.

Solution: Le secteur *Agriculture* a consommé pour 10 093 millions de dollars en produits du secteur *Industrie*.
Le secteur *Services* a consommé pour 2 109 millions de dollars de ses propres produits.

2. Quelle formule faut-il taper en **C7** pour obtenir par recopie automatique les valeurs de la plage **C7** à **F7** ?

Solution: La formule qu'il faut taper en **C7** est =SOMME(C3 :C6).

3. Compléter sur le fichier Excel les cellules **C7** à **F7**. Donner la signification des valeurs trouvées sur cette plage.

Solution:

	B	C	D	E	F
7	**Total**	25 809	186 753	14 121	5 643

Les valeurs trouvées correspondent aux consommations intermédiaires totales par secteur.

4. On donne ci-dessous la production totale de 1947 par secteur d'activité en millions de dollars.

Agriculture :46 712 **Industrie** :360 998
Services :31 967 **Gouvernement et autres** :26 015

a. Compléter la plage de cellules **H3** à **H6** et calculer le contenu de la cellule **H7**. Quelle est la signification de cette dernière valeur ?

Solution: La formule pour la cellule **H7** est =SOMME(H3 :H6). La valeur en **H7** représente la production totale de l'économie américaine en 1947.

	H
1	
2	**Production Totale**
3	46 712
4	360 998
5	31 967
6	26 015
7	465 692

b. La **valeur ajoutée** par secteur est la production de ce secteur disponible pour la demande finale, *i.e* la production totale du secteur correspondant diminuée des consommations intermédiaires du secteur.
Compléter la plage de cellules **C8** à **F8** à l'aide de formules adaptées.

Solution: Les formules adaptées sont :

- en C8 := H3-C7
- en D8 := H4-D7
- en E8 := H5-E7
- en F8 := H6-F7

B	C	D	E	F
Valeur ajoutée	20 903	174 245	17 846	20 372

5. a. Compléter la colonne "**Demande finale**" à l'aide d'une formule recopiée.

Solution: La formule pour la cellule **G3** à recopier vers le bas est = H3 - SOMME(C3 :F3).

	G
1	
2	Demande finale
3	5 310
4	193 102
5	19 819
6	15 135
7	233 366

b. Quelle formule faut-il taper en **C10** pour obtenir le premier terme de la matrice des coefficients techniques C associée à la répartition sectorielle proposée ?

Solution: La formule pour la cellule **C10** est C3/H$3
On met $ pour bloquer la cellule **H3** lorsque l'on va procéder à une recopie automatique pour obtenir la première colonne de la matrice **C** des coefficients techniques dans la question suivante.

c. Compléter la plage **C10** à **F13** pour obtenir la matrice **C** ci-dessous.

	B	C	D	E	F
10	Matrice C	0,32721785	0,071573804	0,0052554	0,004266769
11		0,21606868	0,393251486	0,336691	0,19515664
12		0,00813495	0,025811777	0,0659743	0,013107822
13		0,0010918	0,026687128	0,0338161	0,004382087

Solution: Pour obtenir la matrice des coefficients techniques, Il va nous falloir procéder de même que précédemment pour les autres secteurs Industrie, Services et Gvts et autres .
Les formules adaptées sont :

- en C10 := C3/H$3
- en D10 := D3/H$4

– en E10 := E3/H\$5
– en F10 := F3/H\$6
On obtient ainsi par recopie automatique colonne par colonne la matrice **C** des coefficients technique.

d. En utilisant cette matrice **C** et la matrice-colonne de production **P**, retrouver par un calcul matriciel sur tableur la matrice-colonne des demandes finales $\mathbf{D}_F$ de production.

Solution: Nous avons vu dans l'Introduction.6. que : $(I_2 - C) \times P = D_F$. Cette fois ci, nous sommes dans un modèle plus proche de la réalité et l'économie se décompose en 4 branches : Agriculture, Industrie, Services, Gouvernement et autres.
Nous allons donc utiliser la formule de l'Introduction. 6. mais cette fois si avec nos nouvelles matrices P et C : $(I_4 - C) \times P = D_F$.
La matrice $I_4 - C$ est :

21	Matrice L de Léontief	0,67278215	-0,0715738	-0,0052554	-0,004266769
22		-0,2160687	0,606748514	-0,336691	-0,19515664
23		-0,008135	-0,02581178	0,9340257	-0,013107822
24		-0,0010918	-0,02668713	-0,0338161	0,995617913

Dans le 4, on nous a donné le vecteur colonne P de production, il nous faut à présent faire le calcul sur Tableur $L \times P$ afin d'obtenir le vecteur colonne des demandes finales. Ce calcul s'effectue avec la formule =PRODUITMAT(C21 :F24 ;G21 :G24). On sélectionne d'abord la plage de cellules **H21** à **H24**, ensuite on rentre la formule ci-dessus puis on tape :

$\boxed{\text{Ctrl}} + \boxed{\text{Maj}} + \boxed{\text{Entrée}}$

On obtient :

H21 = {=PRODUITMAT(C21:F24;G21:G24)}

	B	C	D	E	F	G	H
20						Production Totale	Demande finale
21	Matrice L de Léontief	0,67278215	-0,0715738	-0,0052554	-0,004266769	46712	5310
22		-0,2160687	0,606748514	-0,336691	-0,19515664	360998	193102
23		-0,008135	-0,02581178	0,9340257	-0,013107822	31967	19819
24		-0,0010918	-0,02668713	-0,0338161	0,995617913	26015	15135

On retrouve bien notre colonne des demandes finales trouvée en **5.a**.

Partie 2 :Interprétation des coefficients de $(I_4 - C)^{-1}$

1. A l'aide du tableur, déterminer la **matrice de Leontief** $I_4 - C$, puis son inverse $(I_4 - C)^{-1}$.

Solution: Cette fois-ci, la formule à rentrer, après avoir sélectionné la plage où l'on veut voir la matrice inverse s'afficher, ici **C27** à **F30**, est =INVERSEMAT(C21 :F24).
Après avoir rentré : $\boxed{\text{Ctrl}} + \boxed{\text{Maj}} + \boxed{\text{Entrée}}$, on obtient :

27	Inverse de L	1,54770977	0,187848383	0,0780331	0,044481344
28		0,57337958	1,759077941	0,6502086	0,355824292
29		0,02957881	0,05093703	1,0900478	0,024462255
30		0,01807107	0,049087429	0,0545376	1,014818736

2. On suppose que la demande finale augmente d'une unité pour le secteur *Agriculture*.

La nouvelle matrice-colonne des demandes finales est donc $D_1 = \begin{pmatrix} 5311 \\ 193102 \\ 19819 \\ 15135 \end{pmatrix}$.

a. Déterminer les nouvelles productions globales par secteur.

Solution: Nous avons vu précédemment que $L \times P = D_F$. Si l'on multiplie à droite par L^{-1} de part et d'autre de l'égalité, on obtient : $P = L^{-1} \times D_F$.
Cette fois-ci notre nouvelle matrice-colonne des demandes finales est D_1, on obtient la nouvelle matrice-colonne des productions : $P_1 = L^{-1} \times D_1$. Pour cela, on s'aide comme précédemment de la formule PRODUITMAT entre L^{-1} et D_1.

	B	C	D	E	F	G	H
26						Matrice D_1	Nouvelle Production
27	Inverse de L	1,54770977	0,187848383	0,0780331	0,044481344	5311	46713,548
28		0,57337958	1,759077941	0,6502086	0,355824292	193102	360998,573
29		0,02957881	0,05093703	1,0900478	0,024462255	19819	31967,030
30		0,01807107	0,049087429	0,0545376	1,014818736	15135	26015,018

b. Calculer la différence entre la nouvelle et l'ancienne matrice-colonne des productions.

Solution: On fait la différence entre la nouvelle et l'ancienne matrice colonne des productions donnée au 4 :

H	I	J
Nouvelle Production	Ancienne production	Différence
46713,548	46712	1,5477098
360998,573	360998	0,5733796
31967,030	31967	0,0295788
26015,018	26015	0,0180711

c. Comparer avec les colonnes de la matrice $(I_4 - C)^{-1}$ et commenter.

Solution: On retrouve la première colonne de l'inverse de la matrice de Leontief.

3. Reprendre le travail précédent avec les nouvelles matrices-colonnes de demandes suivantes :

$$D_2 = \begin{pmatrix} 5310 \\ 193103 \\ 19819 \\ 15135 \end{pmatrix}, \quad D_3 = \begin{pmatrix} 5310 \\ 193102 \\ 19820 \\ 15135 \end{pmatrix} \text{ et } D_3 = \begin{pmatrix} 5310 \\ 193102 \\ 19819 \\ 15136 \end{pmatrix}$$

Solution: Voici les affichages tels qu'ils apparaissent dans le fichier Excel :

	B	C	D	E	F	G	H	I	J
32						Matrice D2	Nouvelle Production	Ancienne production	Différence
33	Inverse de L	1,54770977	0,187848383	0,0780331	0,044481344	5310	46712,18785	46712	0,1878484
34		0,57337958	1,759077941	0,6502086	0,355824292	193103	360999,7591	360998	1,7590779
35		0,02957881	0,05093703	1,0900478	0,024462255	19819	31967,05094	31967	0,050937
36		0,01807107	0,049087429	0,0545376	1,014818736	15135	26015,04909	26015	0,0490874
37									
38						Matrice D3	Nouvelle Production	Ancienne production	Différence
39	Inverse de L	1,54770977	0,187848383	0,0780331	0,044481344	5310	46712,07803	46712	0,0780331
40		0,57337958	1,759077941	0,6502086	0,355824292	193102	360998,6502	360998	0,6502086
41		0,02957881	0,05093703	1,0900478	0,024462255	19820	31968,09005	31967	1,0900478
42		0,01807107	0,049087429	0,0545376	1,014818736	15135	26015,05454	26015	0,0545376
43									
44						Matrice D4	Nouvelle Production	Ancienne production	Différence
45	Inverse de L	1,54770977	0,187848383	0,0780331	0,044481344	5310	46712,04448	46712	0,0444813
46		0,57337958	1,759077941	0,6502086	0,355824292	193102	360998,3558	360998	0,3558243
47		0,02957881	0,05093703	1,0900478	0,024462255	19819	31967,02446	31967	0,0244623
48		0,01807107	0,049087429	0,0545376	1,014818736	15136	26016,01482	26015	1,0148187

3. Bilan

a. En utilisant $(I_4 - C)^{-1}$, quelle modification faut-il opérer sur la matrice-colonne des productions globales fournies initialement pour traduire l'augmentation d'une unité de la demande finale pour un secteur donné ?

Solution: Pour traduire l'augmentation d'une unité de la demande finale pour le secteur i, il faut ajouter à la matrice-colonne des productions globales initiales la colonne i de la matrice $(I_4 - C)^{-1}$.

b. Donner finalement une interprétation du terme d'indices (i,j) de la matrice $(I_4 - C)^{-1}$.

Solution: Le terme d'indices (i,j) de la matrice $(I_4 - C)^{-1}$ est le montant (la quantité) dont le secteur i doit augmenter sa production pour satisfaire à une augmentation de la demande finale d'une unité de la part du secteur j.