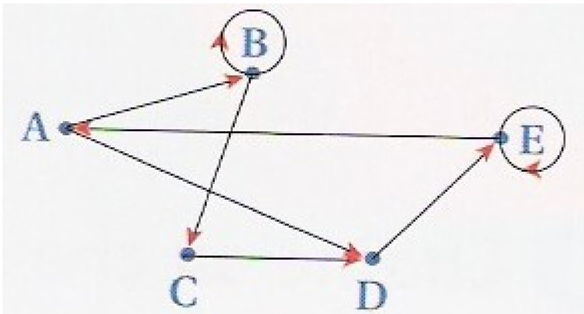
D. Les graphes orientés-graphes pondérés

1 Graphes orientés

Définitions 1

- Un graphe est **orienté** si ses arêtes ne peuvent être parcourues que dans un sens. L'orientation des arêtes est indiquée par des flèches sur les arêtes. Une arête orientée est aussi appelée un **arc**.
- Une **boucle** est un arc dont l'origine et l'extrémité sont identiques.
- Un **chemin** est une succession d'arcs telle que l'extrémité de chacun (sauf le dernier) est l'origine du suivant. Le nombre d'arcs qui composent un chemin est appelé la **longueur du chemin**.
- Un **chemin fermé** est un chemin dont l'origine et l'extrémité coïncident.
- Un **circuit** est un chemin fermé dont les arcs sont tous distincts.

Exemple 1
Le graphe G est orienté d'ordre 5. Il y a une boucle sur les sommets B et E.



- A-B-B-C-D est un chemin de longueur 4.
- A-B-C-D-E-A est un circuit de longueur 5.

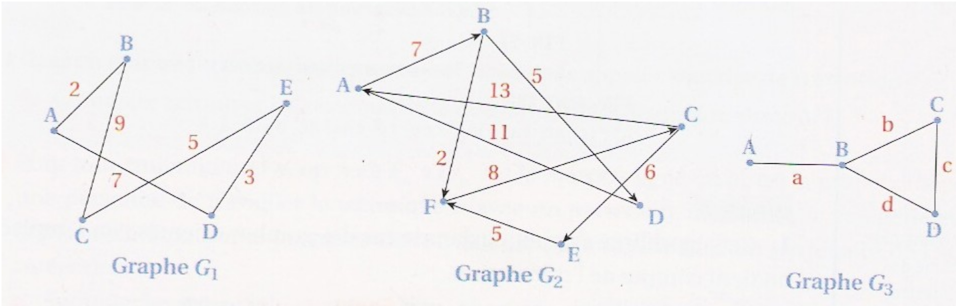
2 Graphes étiquetés, graphes pondérés

Définitions 2

- Un graphe **étiqueté** est un graphe (orienté ou non) dont les liaisons entre les sommets (arêtes ou arcs) sont affectées d'étiquettes (mot, lettre, symbole, etc...).
- Un graphe **pondéré** est un graphe étiqueté dont toutes les étiquettes sont des nombres réels positifs ou nuls. Ces nombres sont les **poids** des liaisons (arêtes ou arcs) entre les sommets.
- Le **poids d'une chaîne** (respectivement **d'un chemin**) est la somme des poids des arêtes (resp. des arcs) qui constituent la chaîne (resp. le chemin).
- Une **plus coute chaîne** (resp. **un plus court chemin**) entre 2 sommets est, parmi les chaînes qui les relient (resp. les chemins qui les relient) celle (celui) qui a le poids minimum.

Exemple 2

- Le graphe G_1 est un graphe pondéré, non orienté.
- Le graphe G_2 est pondéré et orienté.
- Le graphe G_3 est étiqueté, non orienté.



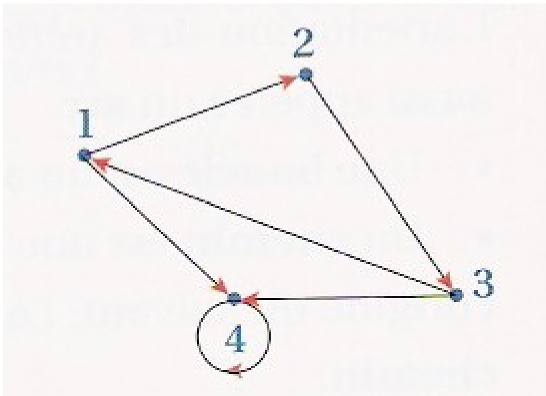
3 Matrice d'adjacence d'un graphe orienté

Définitions 3

Considérons un graphe G orienté, d'ordre n. On numérote les sommets de G de 1 à n.
On appelle **matrice d'adjacence associée à G** la matrice M dont chaque terme a_{ij} est égal au nombre d'arêtes orientées (d'arcs) allant du sommet i vers le sommet j.
Propriété : M est la matrice d'adjacence associée à un graphe orienté dont les sommets sont numérotés. p désigne un nombre entier naturel. Le terme a_{ij} (ligne i et colonne j) de la matrice M^p donne le nombre de chaînes de longueur p reliant i à j.

Exemple 3
La matrice d'adjacence associée au graphe ci-dessous, en considérant les sommets rangés dans l'ordre croissant, est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Remarques 1.

1. *L'identification des sommets peut aussi s'effectuer avec des lettres. On indique dans ce cas, pour éviter toute ambiguïté, l'ordre choisi sur les lettres pour écrire la matrice d'adjacence.*
2. *On admet que les propriétés de M^n vues pour les graphes non orientés restent valables pour les graphes orientés.*

4 Chaîne ou chemin de poids minimum

Certains problèmes consistent à chercher entre deux points donnés le parcours qui a une "longueur" (durée, coût, distance) minimum. Ces problèmes se ramènent à la recherche d'une plus courte chaîne ou d'un plus court chemin.

On propose ci-dessous **l'algorithme de Moore-Dijkstra** qui permet de résoudre ce type de problèmes dans les graphes pondérés connexes.

Algorithme de Moore-Dijkstra

```
Entrées      Graphe pondéré G avec sommet de départ D et sommet de fin F
Sorties      Plus courte chaîne de D à F
Traitement   Attribuer le coefficient 0 au sommet de départ D
             Attribuer aux sommets adjacents à D des marques temporaires égales au
             poids des arêtes qui y aboutissent
             Attribuer aux sommets non adjacents à D la marque ∞
             TANT QU'il reste des sommets non sélectionnés FAIRE
                 Choisir un sommet S ayant la marque la plus petite et fixer cette
                 marque définitivement.
                 Pour chaque sommet T adjacent à S,
                 calculer s = marque S + poids arête S – T
                 SI s < marque existante de T
                     ALORS Remplacer la marque de T par s
                     SINON Conserver la marque du sommet T
                 FIN SI
                 Recopier les marques des sommets non adjacents à S
             FIN TANT QUE
             Afficher la plus courte chaîne de D à F
```

Remarques 2.

1. *Cet algorithme s'applique dans le cas des graphes orientés : on remplace arêtes par arcs et on tient compte de l'orientation.*
2. *Pour le détail de la méthode : voir le 2) du problème 11 p.277 du livre hyperbole.*