Les nombres complexes
Le point de vue algébrique

Table des matières

1 Introduction

1.1 Un problème historique

À la fin du XVIe siècle, l'heure est à la résolution générale des équations du troisième degré. À l'aide d'un changement de variable, bien choisi, toute équation du troisième degré peut se mettre sous la forme
$$x^3 + px + q = 0$$

- Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + px + q$.

  f est continue sur $\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} = -\infty$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution.

- La formule de Cardan donne l'expression de cette solution :
$$x_0 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

- Bombelli, autre mathématicien de l'époque, applique alors cette formule à l'équation :
$$x^3 - 15x - 4 = 0 \quad \text{avec} \;\; p = -15 \;\text{ et }\; q = -4$$
  Il obtient alors :
$$\begin{aligned} x_0 &= \sqrt[3]{2 - \sqrt{4 - 125}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{4 - 125}} = \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} \\ &= \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} \end{aligned}$$
  Cette formule aboutit sur une incompatibilité : $\sqrt{-1}$.

- Bombelli remarque que s'il pose $(\sqrt{-1})^2 = -1$,
  il obtient en développant les cubes suivants :[1]
$$\begin{aligned} (2 - \sqrt{-1})^3 &= 2^3 - 3(2)^2\sqrt{-1} + 3(2)(\sqrt{-1})^2 - (\sqrt{-1})^3 \\ &= 8 - 12\sqrt{-1} + 6(-1) - (-1)\sqrt{-1} = 2 - 11\sqrt{-1} \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} (2 + \sqrt{-1})^3 &= 2^3 + 3(2)^2\sqrt{-1} + 3(2)(\sqrt{-1})^2 + (\sqrt{-1})^3 \\ &= 8 + 12\sqrt{-1} + 6(-1) + (-1)\sqrt{-1} = 2 + 11\sqrt{-1} \end{aligned}$$
  Il en déduit alors que $x_0 = 2 - \sqrt{-1} + 2 + \sqrt{-1} = 4$
  On constate que 4 est bien solution : $4^3 - 15 \times 4 - 4 = 64 - 60 - 4 = 0$

- $\sqrt{-1}$ n'existe pas, mais permet de trouver la solution d'une équation. Il s'agit d'un intermédiaire de calcul. Les nombres complexes étaient nés ! !

- Au XVIIe siècle, ces nombres que Descartes appelle imaginaires, deviennent des intermédiaires de calcul courant, mais on ne les considère pas encore comme des nombres.

- Au XVIIIe siècle, Euler montre que ces nombres peuvent se mettre sous la forme $a + b\sqrt{-1}$. Il propose de noter $\sqrt{-1} = i$. (i comme « imaginaire »).

- Au XIXe siècle Gauss montre que l'on peut représenter de tels nombres. Ils obtiennent alors le statut de nombres qu'il rebaptise complexes.

1. On rappelle que : $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ et $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

2 Construction des nombres complexes

2.1 Définition

Définition 1 : On appelle $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Un nombre complexe z est un nombre s'écrivant sous la forme :

$$z = a + ib \quad \text{avec}(a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad i^2 = -1$$

Le nombre réel a s'appelle la **partie réelle** de z notée : $\mathrm{Re}(z)$

Le nombre réel b s'appelle la **partie imaginaire** de z noté : $\mathrm{Im}(z)$.

La forme $z = a + ib$ est appelée **forme algébrique**.

Remarque :

- Si $b = 0$, z est réel donc $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
- Si $a = 0$, z est un imaginaire pur. L'ensemble des imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$.
- La forme algébrique est unique :
  $z = z' \quad \Leftrightarrow \quad a + ib = a' + ib' \quad \Leftrightarrow \quad a = a' \text{ et } b = b'$
  $z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a + ib = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = b = 0$

2.2 Représentation des nombres complexes

Théorème 1 : Soit le repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$ appelé plan complexe.

À tout nombre complexe $z = a + ib$, on peut associer un unique point $\mathrm{M}(a; b)$ dans le repère $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.

On dit que z est **l'affixe** de M et on écrit alors $\mathrm{M}(z)$.

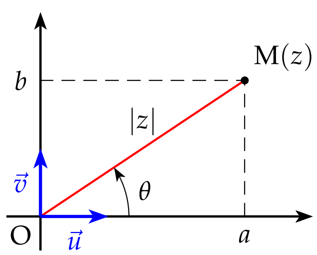
Remarque : Cette application est bijective. À tout point $\mathrm{M}(a; b)$ d'un plan muni d'un repère orthonormé, on peut associer un unique complexe $z = a + ib$.

Conséquence On peut représenter tout nombre complexe $z = a + ib$.

L'axe des abscisses est appelé « axe des réels »
L'axe des ordonnées est appelé « axe des imaginaires purs »

On peut aussi repérer le point M par :

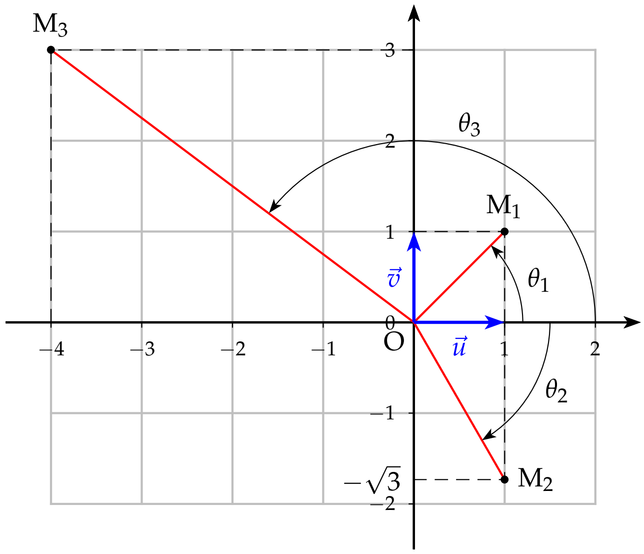
- La distance OM : le module de z noté : $|z|$
- L'angle $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\mathrm{OM}}) = \theta$: l'argument de z noté $\arg(z)$.



On a $\quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad$ et pour $z \neq 0$, $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{|z|} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{|z|} \end{cases}$ avec $\quad \theta = \arg(z) \quad [2\pi]$

Exemple : Représenter puis déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants : $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$, $z_3 = -4 + 3i$

On a les représentations suivantes :



$$\text{OM}_1 = |z_1| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \cos\theta_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$$

$$\text{OM}_2 = |z_2| = \sqrt{1+3} = 2 \quad \text{et} \quad \begin{cases} \cos\theta_2 = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta_2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_2 = -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$$

$$\text{OM}_3 = |z_3| = \sqrt{16+9} = 5 \quad \text{et} \quad \begin{cases} \cos\theta_3 = -\dfrac{4}{5} \\ \sin\theta_3 = \dfrac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow \theta_3 = \arccos\left(-\frac{4}{5}\right) \approx 143^\circ\ [2\pi]$$

2.3 Opérations avec les complexes

Définition 2 : Dans l'ensemble $\mathbb{C}$, on définit deux opérations :

soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$

- L'addition : $z + z' = (a + a') + i(b + b')$
- La multiplication : $zz' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$

$(\mathbb{C}, +, \times)$ forme un corps commutatif. Il possède donc les mêmes propriétés pour ces deux opérations que dans l'ensemble des nombres réel $\mathbb{R}$:

- La commutativité et l'associativité de l'addition et de la multiplication ainsi que la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.
- L'intégrité (produit nul) : $\forall z, z' \in \mathbb{C}, \quad zz' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 0 \text{ ou } z' = 0$

Exemples : Soit les opérations suivantes : (retenir que $i^2 = -1$)

$$z_1 = 4 + 7i - (2 + 4i) = 4 + 7i - 2 - 4i = 2 + 3i$$
$$z_2 = (2 + i)(3 - 2i) = 6 - 4i + 3i + 2 = 8 - i$$
$$z_3 = (4 - 3i)^2 = 16 - 24i - 9 = 7 - 24i$$

Remarque : **Comparaison de deux complexes** : il est possible de définir une relation d'ordre dans $\mathbb{C}$ prolongement de la relation d'ordre dans $\mathbb{R}$.
On compare les parties réelles et en cas d'égalité, les parties imaginaires.

En notant "$\preceq$" cette relation : $a + ib \preceq c + id \quad \Leftrightarrow \quad a < c$ ou $(a = c$ et $b \leqslant d)$

On a ainsi : $2 + 5i \preceq 3 - 7i$ et $-1 - i \preceq -1 + 2i$

Cependant cette relation n'est pas "performante" car elle n'est pas compatible avec la multiplication : d'après cette relation : $0 \preceq i \overset{\times i}{\Rightarrow} 0 \preceq -1$ qui est faux.

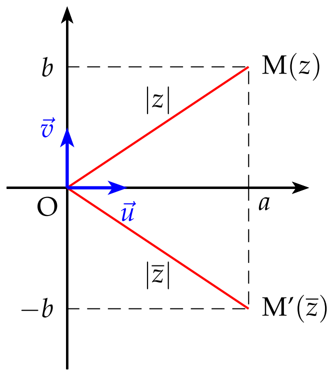
On abandonne donc l'idée d'inéquation dans $\mathbb{C}$!

2.4 Conjugué

Définition 3 : Soit $z = a + ib$ un nombre complexe.
On appelle le nombre conjugué de z, le nombre noté $\bar{z}$ tel que : $\bar{z} = a - ib$.
On a alors : $z\bar{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$.

Démonstration :

$$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - iab + iab + b^2$$
$$= a^2 + b^2$$



Interprétation géométrique :
M′($\bar{z}$) est le symétrique de M(z) par rapport à l'axe des abscisses.

Application :

- Trouver la forme algébrique du complexe suivant : $z = \dfrac{2 - i}{3 + 2i}$

  On multiplie en haut et en bas par le complexe conjugué du dénominateur :

$$z = \frac{(2 - i)(3 - 2i)}{(3 + 2i)(3 - 2i)} = \frac{6 - 4i - 3i - 2}{9 + 4} = \frac{4 - 7i}{13} = \frac{4}{13} - \frac{7}{13}i$$

- Résoudre l'équation suivante : $z = (2 - i)z + 3$

$$z = (2 - i)z + 3 \quad \Leftrightarrow \quad z - (2 - i)z = 3 \quad \Leftrightarrow \quad z(1 - 2 + i) = 3$$
$$z = \frac{3}{-1 + i} = \frac{-3}{1 - i} = \frac{-3(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = -\frac{3}{2} - \frac{3}{2}i$$

2.5 Opérations et propriétés du conjugué

Théorème 2 : Pour tous complexes z et z', on a :

$$\overline{\overline{z}} = z \ , \ \overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'} \ , \ \overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'} \ , \ \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}} \ , \ z' \neq 0 \ , \ \overline{z^n} = (\overline{z})^n \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Remarque : Le conjugué de la somme, du produit et du quotient est égal à la somme, au produit et au quotient du conjugué. Les opérations avec le conjugué ne pose aucun problème.

Démonstration : Ces égalités se démontrent sans soucis, en calculant à part le terme de gauche et le terme de droite en posant $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$.

Exemple : Donner la forme algébrique du conjugué de : $z = \dfrac{3-i}{1+i}$

$$\overline{z} = \overline{\left(\frac{3-i}{1+i}\right)} = \frac{\overline{3-i}}{\overline{1+i}} = \frac{3+i}{1-i} = \frac{(3+i)(1+i)}{1+1} = \frac{3+3i+i-1}{2} = 1+2i$$

Propriété 1 : Soit $z \in \mathbb{C}$, on a :

- $z + \overline{z} = 2\text{Re}(z)$
- $z - \overline{z} = 2i\,\text{Im}(z)$
- z imaginaire pur $\Leftrightarrow$ $z + \overline{z} = 0$
- z réel $\Leftrightarrow$ $z = \overline{z}$

Démonstration : On pose $z = a + ib$

- $z + \overline{z} = a + ib + a - ib = 2a = 2\text{Re}(z)$
- $z - \overline{z} = a + ib - (a - ib) = 2ib = 2i\,\text{Im}(z)$

Exemple : Dans le plan complexe, M est le point d'affixe $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.
Soit $z \in \mathbb{C} - \{1\}$, on pose $Z = \dfrac{5z-2}{z-1}$

1) Exprimer $Z + \overline{Z}$ en fonction de z et $\overline{z}$.

2) Démontrer que : Z imaginaire pur $\Leftrightarrow$ M est sur un cercle privé d'un point

$\Rightarrow \Rightarrow$

1) $$Z + \overline{Z} = \frac{5z-2}{z-1} + \overline{\left(\frac{5z-2}{z-1}\right)} = \frac{5z-2}{z-1} + \frac{5\overline{z}-2}{\overline{z}-1} = \frac{(5z-2)(\overline{z}-1) + (5\overline{z}-2)(z-1)}{(z-1)(\overline{z}-1)}$$

$$= \frac{5z\overline{z} - 5z - 2\overline{z} + 2 + 5z\overline{z} - 5\overline{z} - 2z + 2}{(z-1)(\overline{z}-1)} = \frac{10z\overline{z} - 7(z+\overline{z}) + 4}{(z-1)(\overline{z}-1)}$$

2) Z imaginaire pur $\Leftrightarrow$ $Z + \overline{Z} = 0$. On a donc :

$$10z\overline{z} - 7(z+\overline{z}) + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 10|z|^2 - 14\text{Re}(z) + 4 = 0$$

$$10(x^2+y^2) - 14x + 4 = 0 \quad \overset{\div 10}{\Leftrightarrow} \quad x^2 + y^2 - \frac{7}{5}x + \frac{2}{5} = 0$$

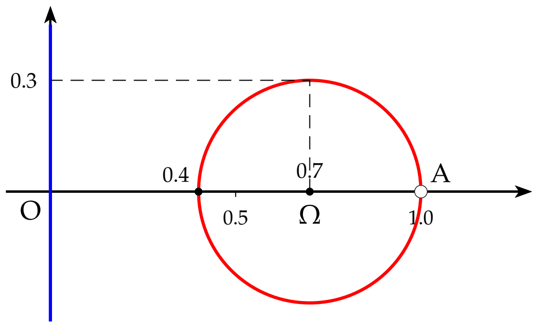
$$\left(x - \frac{7}{10}\right)^2 - \frac{49}{100} + y^2 + \frac{2}{5} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x - \frac{7}{10}\right)^2 + y^2 - \frac{9}{100} = 0$$

$\Leftrightarrow \quad \left(x - \dfrac{7}{10}\right)^2 + y^2 = \left(\dfrac{3}{10}\right)^2$

$\Leftrightarrow \quad (x - 0,7)^2 + y^2 = 0,3^2$

On obtient l'équation d'un cercle $\mathscr{C}$ de centre $\Omega\,(0,7\,;\,0)$ et de rayon $0,3$.

Le point $(1;\,0)$ appartient au cercle, comme $z \neq 1$, ce point ne peut faire partie de l'ensemble des points M.



Remarque : Si M(z) se trouve sur le cercle $\mathscr{C}$ privé du point $(1;0)$, le point M′(Z) se trouve sur l'axe des ordonnées. Le cercle $\mathscr{C}$ privé du point $(1;0)$ se transforme ainsi en la droite des ordonnées par l'application f tel que $f(z) = Z$

3 Équation polynomiale à coefficients réels

3.1 Équation du second degré

Théorème 3 : Soit l'équation à coefficients réels ($a \neq 0$) : $az^2 + bz + c = 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant. Cette équation admet comme solution :

- Si $\Delta > 0$, deux solutions réelles : $z_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$
- Si $\Delta = 0$, une solution réelle double : $z_0 = -\dfrac{b}{2a}$
- Si $\Delta < 0$, deux solutions complexes conjuguées avec $\Delta = i^2(-\Delta)$

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

⚠ La notation $\sqrt{z}$ n'a de sens que si z est un réel positif ou nul.

Exemple : Résoudre $z^2 - 2z + 2 = 0$

$\Delta = 4 - 8 = -4 = (2i)^2$. Comme $\Delta < 0$ on a 2 solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{2 + 2i}{2} = 1 + i \quad \text{ou} \quad z_2 = \frac{2 - 2i}{2} = 1 - i$$

Algorithme : Soit la fonction Python eq2(a,b,c) permettant de calculer les racines de : $ax^2 + bx + c$

Un nombre complexe en Python s'écrit : $a + 1j * b$ ou complex(a,b).

La l'expression $1j$ remplace la lettre i

Cette fonction renvoie pour eq2(1 ,−2 , 2) : $(1 + 1j), (1 - 1j)$

```
from math import*
def eq2(a,b,c):
    D=b**2-4*a*c
    if D>=0:
        x=(-b+sqrt(D))/(2*a)
        y=(-b-sqrt(D))/(2*a)
    else:
        x=(-b+1j*sqrt(-D))/(2*a)
        y=(-b-1j*sqrt(-D))/(2*a)
    return x,y
```

3.2 Factorisation et racines d'un polynôme

On considère des polynômes P de degré n dans $\mathbb{C}$ à coefficients réels :

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \cdots + c_1 z + c_0 \quad \text{avec } \forall k \in [\![0, n]\!],\ c_k \in \mathbb{R} \text{ et } c_n \neq 0$$

On note $\deg P = n$ et si $a \in \mathbb{C}$ est une racine de P, alors : $P(a) = 0$

Théorème 4 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{C}$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$z^n - a^n = (z-a)Q(z) \quad \text{avec } Q \text{ polynôme et } \deg Q = n-1$$

Démonstration : Par récurrence. Montrons que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ z^n - a^n = (z-a)Q(z)\ ,\ \deg Q = n-1$$

Initialisation : $n = 1$, on a $z^1 - a = (z-1) \times 1$ donc $Q(z) = 1$ et $\deg Q = 0$.
La proposition est initialisée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $z^n - a^n = (z-a)Q(z)$, $\deg Q = n-1$,
montrons que $z^{n+1} - a^{n+1} = (z-a)R(z)$, $\deg R = n$

De HR, on a : $z^n = (z-a)Q(z) + a^n$ (1)

$$\begin{aligned} z^{n+1} - a^{n+1} &= z(z^n) - a^{n+1} \overset{(1)}{=} z\left[(z-a)Q(z) + a^n\right] - a^{n+1} = z(z-a)Q(z) + a^n z - a(a^n) \\ &= z(z-a)Q(z) + a^n(z-a) = (z-a)\underbrace{\left[zQ(z) + a^n\right]}_{R(z)} \end{aligned}$$

$\deg Q = n-1$ donc $\deg zQ(z) = n$ et donc $\deg R = n$.
La proposition est héréditaire.

Par initialisation et hérédité : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ z^n - a^n = (z-a)Q(z)$, $\deg Q = n-1$

Exemple : Factoriser $z^3 - 8$

$z^3 - 8 = z^3 - 2^3$. On peut factoriser par $(z-2)$

Pour trouver la factorisation, on peut effectuer une division euclidienne (ci-contre).
On soustrait à chaque étape le quotient trouvé.

On obtient alors :

$$z^3 - 8 = (z-2)(z^2 + 2z + 4)$$

$$\begin{array}{rrrr|l} z^3 & +0z^2 & +0z & -8 & z-2 \\ \cline{5-5} -z^3 & +2z^2 & & & z^2+2z+4 \\ \cline{1-2} 0z^3 & +2z^2 & +0z & & \\ & -2z^2 & +4z & & \\ \cline{2-3} & 0z^2 & +4z & -8 & \\ & & -4z & +8 & \\ \cline{3-4} & & 0z & +0 & \end{array}$$

Algorithme : On peut définir une fonction Python qui donne le quotient de cette division à l'aide de l'algorithme de Horner.

Théorème 5 : Soit P un polynôme tel que $\deg P = n$ et a une racine de P.
P se factorise par $(z-a)$ et donc $P(z) = (z-a)Q(z)$ avec $\deg Q = n-1$.

Démonstration : Avec le symbole $\sum$.

On pose $P(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k z^k$ et comme a est une racine de P, on a $P(a) = 0$.

En utilisant le théorème précédent :

$$P(z) = P(z) - P(a) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k - \sum_{k=0}^{n} c_k a^k = \sum_{k=0}^{n} c_k (z^k - a^k) \overset{z^0 - a^0 = 0}{=} \sum_{k=1}^{n} c_k \underbrace{(z^k - a^k)}_{(z-a)Q_k(z)}$$

$$= (z-a) \underbrace{\sum_{k=1}^{n} c_k Q_k(z)}_{Q(z)} = (z-a)Q(z)$$

Or $\deg Q_n = n-1$ et $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $\deg Q_k < n-1$, donc $\deg Q = n-1$.

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^3 + z^2 + 2z - 4 = 0$

- On pose $P(z) = z^3 + z^2 + 2z - 4$.
  $z = 1$ est une racine évidente car $P(1) = 1 + 1 + 2 - 4 = 0$.
- D'après le théorème précédant $P(z) = (z-1)(az^2 + bz + c)$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$
- On détermine les coefficients a, b, c par identification sur le polynôme P :
  $(z-1)(az^2+bz+c) = az^3 + bz^2 + cz - az^2 - bz - c = az^3 + (b-a)z^2 + (c-a)z - c$
  De façon immédiate, on trouve $a = 1$ et $c = 4$
  puis sur le coefficient de z^2 : $b - a = 1 \Rightarrow b = 2$
  On a alors : $P(z) = (z-1)(z^2 + 2z + 4)$
- $P(z) = 0 \Leftrightarrow z = 1$ ou $z^2 + 2z + 4 = 0$
  $\Delta = 4 - 16 = -12 = (2i\sqrt{3})^2$ deux racines complexes conjuguées :
  $$z_1 = \frac{-2 + 2i\sqrt{3}}{2} = -1 + i\sqrt{3} \quad \text{ou} \quad z_2 = \frac{-2 - 2i\sqrt{3}}{2} = -1 - i\sqrt{3}$$
  $S = \left\{1\,; -1 + i\sqrt{3}\,; -1 - i\sqrt{3}\right\}$

Théorème 6 : Un polynôme non nul de degré n admet au plus n racines.

Démonstration : Par récurrence. Soit P_n un polynôme non nul de degré n.

Initialisation : $n = 0$, P_0 est constant non nul donc n'admet pas de racine.
La propriété est initialisée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que P_n admet au plus n racines, montrons que P_{n+1} admet au plus $(n+1)$ racines.

- Si P_{n+1} n'a pas de racine, alors P_{n+1} admet au plus $(n+1)$ racines.
  La proposition est héréditaire.
- Si P_{n+1} possède une racine a alors, d'après le théorème précédant :
  $$P_{n+1}(z) = (z-a)P_n$$
  Si P_{n+1} possède une autre racine $b \neq a$, alors d'après l'intégrité de $\mathbb{C}$:
  $$P_{n+1}(b) = 0 \quad \Rightarrow \quad (b-a)P_n(b) = 0 \quad \Rightarrow \quad P_n(b) = 0 \quad \Rightarrow \quad b \text{ racine de } P_n$$
  À part a toutes les autres racines de P_{n+1} sont des racines de P_n qui d'après HR possède au plus n racines, donc P_{n+1} possède au plus $(n+1)$ racines.
  La proposition est héréditaire.

Par initialisation et hérédité, un polynôme de degré n possède au plus n racines.

4 Formule du binôme

Théorème 7 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tous $a, b \in \mathbb{C}$, on a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

Démonstration : Par récurrence. Avec le symbole $\sum$

Soit la propriété : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k$

Initialisation : $n = 0, \quad (a+b)^0 = 1$ et $\displaystyle\binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$. La proposition est initialisée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que : $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k$

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} = (a+b)^n(a+b) &\overset{\text{HR}}{=} \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k\right](a+b) \\
&= a \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k \;+\; b \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k}\, b^k \;+\; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^{k+1} \\
&= a^{n+1} \;+\; \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k}\, b^k \;+\; \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^{k+1} \;+\; b^{n+1}
\end{aligned}$$

Dans la deuxième somme, on change $k \to k+1$, on obtient alors :

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= a^{n+1} \;+\; \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k}\, b^k \;+\; \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n-(k-1)}\, b^k \;+\; b^{n+1} \\
&= a^{n+1} \;+\; \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k}\, b^k \;+\; \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k}\, b^k \;+\; b^{n+1} \\
&= a^{n+1} \;+\; \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right]}_{\text{relation de Pascal}} a^{n+1-k}\, b^k \;+\; b^{n+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= \binom{n+1}{0}a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}\,b^k + \binom{n+1}{n+1}b^{n+1}\\ &= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}\,b^k\end{aligned}$$

La proposition est héréditaire.

Par initialisation et hérédité, $\forall n \in \mathbb{N},\quad (a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}\,b^k$

Exemple : À l'aide de la formule du binôme et en s'aidant du triangle de Pascal, développer : $(1+i)^5$ et $(2-i)^4$

$$\begin{aligned}(1+i)^5 &= 1+5i+10i^2+10i^3+5i^4+i^5\\ &= 1+5i-10-10i+5+i\\ &= -4-4i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2-i)^4 &= 2^4+4(2^3)(-i)+6(2^2)(-i)^2+4(2)(-i)^3+(-i)^4\\ &= 16-32i-24+8i+1\\ &= -7-24i\end{aligned}$$

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	**4**	**6**	**4**	**1**	
1	**5**	**10**	**10**	**5**	**1**

Triangle de Pascal
jusqu'au degré 5