

# Les nombres complexes

## Le point de vue géométrique

### Table des matières

<b>1</b>	<b>Forme trigonométrique</b>	<b>2</b>
1.1	Angle orienté et mesure principale . . . . .	2
1.2	Forme trigonométrique . . . . .	2
1.3	Relations de symétrie . . . . .	3
1.4	Relations trigonométriques . . . . .	3
1.5	Opérations sur les modules et arguments . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Forme exponentielle</b>	<b>4</b>
2.1	Introduction . . . . .	4
2.2	Définition . . . . .	5
2.3	Formule de Moivre et formules d'Euler . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Ensemble des complexes de module 1</b>	<b>5</b>
3.1	Propriété . . . . .	5
3.2	Racines $n$ -ième de l'unité . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Complexes et vecteurs</b>	<b>7</b>
4.1	Affixe d'un vecteur . . . . .	7
4.2	Ensemble de points . . . . .	7
4.3	Somme de deux vecteurs . . . . .	7
4.4	Angle orienté . . . . .	8
4.5	Alignement, parallélisme et orthogonalité . . . . .	8

# 1 Forme trigonométrique

## 1.1 Angle orienté et mesure principale

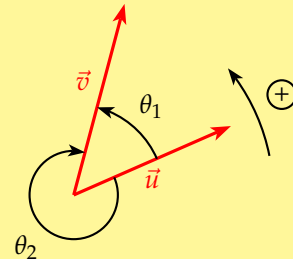
**Définition 1 :** Un angle orienté est défini par deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , noté  $(\vec{u}, \vec{v})$ .

L'angle est alors orienté de  $\vec{u}$  vers  $\vec{v}$ .

On dit que les mesures (en radian)  $\theta_1$  et  $\theta_2$  d'un même angle orienté  $(\vec{u}, \vec{v})$  sont égales modulo  $2\pi$ , s'il existe un entier relatif  $k$  tel que :

$$\theta_2 = \theta_1 + k \times 2\pi \quad \text{on note alors} \quad \theta_1 = \theta_2 [2\pi]$$

On appelle mesure principale d'un angle  $(\vec{u}, \vec{v})$ , la mesure  $\theta$  avec  $\theta \in ]-\pi, \pi]$ .



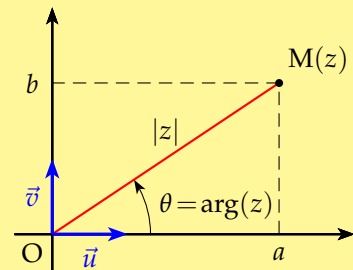
**Remarque :** On veillera à donner un angle orienté avec sa mesure principale :  
par exemple  $-\frac{5\pi}{3} = \frac{\pi}{3} [2\pi]$ .

## 1.2 Forme trigonométrique

**Définition 2 :** Soit  $z = a + ib$  un complexe non nul.

La forme trigonométrique de  $z$ , est l'écriture de la forme :  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

- $r = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$  module de  $z$
- $\theta = (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \arg(z) [2\pi]$  argument de  $z$



**Remarque :**  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  est à relier aux coordonnées polaires de  $M(r; \theta)$ .

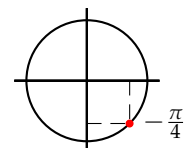
**Exemples :**

Trouver la forme trigonométrique de  $z = 1 - i$

$$|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

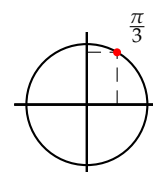
$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{d'où} \quad \theta = -\frac{\pi}{4} [2\pi], \text{ d'où :}$$

$$z = \sqrt{2} \left[ \cos \left( -\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{4} \right) \right]$$



Trouver la forme algébrique de  $z = \sqrt{3} \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$

$$\text{On a } z = \sqrt{3} \left( \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} i$$



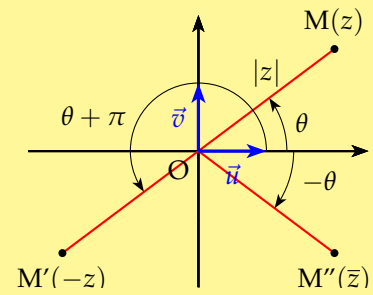
### 1.3 Relations de symétrie

**Propriété 1 :** Pour tout complexe  $z$  non nul, on a

les relations suivantes :

$$|-z| = |z| \quad \text{et} \quad \arg(-z) = \arg(z) + \pi \quad [2\pi]$$

$$|\bar{z}| = |z| \quad \text{et} \quad \arg(\bar{z}) = -\arg(z) \quad [2\pi]$$



### 1.4 Relations trigonométriques

**Théorème 1 :** Formules d'addition

Pour tous réels  $a$  et  $b$ , on a les relations

$$\textcircled{1} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad \textcircled{3} \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\textcircled{2} \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \quad \textcircled{4} \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

**Démonstration :** Formule  $\textcircled{2}$ . Soit les points A et B sur le cercle unité :

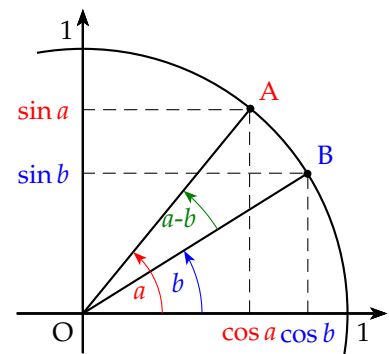
Calculons le produit scalaire  $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$  de deux façons :

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = OA \times OB \times \cos(a-b) = \cos(a-b)$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \begin{pmatrix} \cos a \\ \sin a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos b \\ \sin b \end{pmatrix} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

Des deux égalités, on déduit la formule  $\textcircled{2}$  :

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$



Pour trouver la formule  $\textcircled{1}$ , on remplace dans  $\textcircled{2}$   $b$  par  $-b$ , on a alors :

$$\cos(a+b) = \cos[a - (-b)] \stackrel{\textcircled{2}}{=} \cos a \cos(-b) + \sin a \sin(-b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

Pour trouver les formules  $\textcircled{3}$  et  $\textcircled{4}$  avec le sinus, on utilise les relations :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

**Remarque :** Pour se souvenir des formules d'addition, on peut remarquer :

- Avec le cosinus on « ne panache pas » tandis qu'avec le sinus on « panache ».
- Avec le cosinus de  $a+b$ , on met un « moins » entre les deux termes.

**Théorème 2 :** Formules de duplication

Pour tout réel  $a$ , on a les relations :

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

**Démonstration :** On utilise les formules d'addition en faisant  $b = a$ .

## 1.5 Opérations sur les modules et arguments

**Théorème 3 :** Pour tous complexes  $z$  et  $z'$  non nuls, on a les relations suivantes :

$$|z z'| = |z| |z'| \quad \text{et} \quad \arg(z z') = \arg(z) + \arg(z') \quad [2\pi]$$

$$|z^n| = |z|^n \quad \text{et} \quad \arg(z^n) = n \arg(z) \quad [2\pi]$$

$$\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \quad [2\pi]$$

**Démonstration :** Soit  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  et  $z' = r'(\cos \theta' + i \sin \theta')$  :

$$\begin{aligned} z z' &= r r' (\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta' + i \sin \theta') \\ &= r r' (\cos \theta \cos \theta' + i \cos \theta \sin \theta' + i \sin \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta') \\ &= r r' [\underbrace{\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta'}_{\cos(\theta + \theta')} + i \underbrace{(\cos \theta \sin \theta' + \sin \theta \cos \theta')}_{\sin(\theta + \theta')}] \\ &= r r' (\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')) \end{aligned}$$

Par identification, on a :  $|z z'| = r r' = |z| |z'|$  et  $\arg(z z') = \arg(z) + \arg(z') \quad [2\pi]$

• On démontre  $|z^n| = |z|^n$  et  $\arg(z^n) = n \arg(z)$  par récurrence.

• Pour le quotient, on pose  $Z = \frac{z}{z'}$ , on a donc  $z = Z z'$ . Du produit :

$$|z| = |Z| |z'| \quad \Leftrightarrow \quad |Z| = \frac{|z|}{|z'|}$$

$$\arg(z) = \arg(Z) + \arg(z') \quad [2\pi] \quad \Leftrightarrow \quad \arg(Z) = \arg(z) - \arg(z') \quad [2\pi]$$

## 2 Forme exponentielle

### 2.1 Introduction

Soit la fonction  $f$  définie de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  par :  $f(\theta) = \cos \theta + i \sin \theta$ .

$$\begin{aligned} f(\theta)f(\theta') &= (\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta' + i \sin \theta') \\ &= (\cos \theta \cos \theta' + i \cos \theta \sin \theta' + i \sin \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta') \\ &= (\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' + i(\cos \theta \sin \theta' + \sin \theta \cos \theta')) \\ &= [\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')] = f(\theta + \theta') \end{aligned}$$

Donc  $f(\theta + \theta') = f(\theta)f(\theta')$ .

Les seules fonctions dérivables non nulles ( $f(0) = 1$ ) sur  $\mathbb{R}$  qui transforment une somme en produit sont du type  $f(x) = e^{kx}$ .

En étendant la fonction exponentielle à  $\mathbb{C}$ , on pose  $f(\theta) = e^{k\theta}$  avec  $k \in \mathbb{C}$  et  $\theta \in \mathbb{R}$

Dérivons la fonction  $f$  pour déterminer  $k$  :  $f'(\theta) = k e^{k\theta}$  et

$$f'(\theta) = -\sin \theta + i \cos \theta = i^2 \sin \theta + i \cos \theta = i(\cos \theta + i \sin \theta) = i f(\theta)$$

Par identification, on obtient alors  $k = i$ .

En étendant la fonction exponentielle à  $\mathbb{C}$ , on décide de poser  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ .

## 2.2 Définition

**Définition 3 :** La forme exponentielle d'un nombre complexe non nul est :

$$z = re^{i\theta} \quad \text{avec } r = |z| \text{ et } \theta = \arg(z) \quad [2\pi]$$

**Remarque :** On peut maintenant admirer l'expression d'Euler :  $e^{i\pi} + 1 = 0$ .

Cette expression contient tous les nombres qui ont marqué l'histoire des mathématiques : 0 et 1 pour l'arithmétique,  $\pi$  pour la géométrie,  $i$  pour les nombres complexes et  $e$  pour l'analyse.

**Exemple :** Soit  $z = 1 + i\sqrt{3}$ , on a :  $|z| = 2$  et  $\arg(z) = \frac{\pi}{3}$  donc  $z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

## 2.3 Formule de Moivre et formules d'Euler

**Théorème 4 :** Soit  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}$ , on a alors :

- Formule de Moivre :  $\cos n\theta + i \sin n\theta = e^{in\theta} = (\cos \theta + i \sin \theta)^n$
- Formules d'Euler :  $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$  et  $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

**Remarque :** Bien remarquer que pour  $\sin \theta$ , on divise par  $2i$ .

**Démonstration :**

- La formule de Moivre est l'application directe de la relation fonctionnelle de la fonction exponentielle :  $e^{na} = (e^a)^n$
- Pour les formules d'Euler, on développe la forme exponentielle :

$$\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{\cos \theta + i \sin \theta + \cos(-\theta) + i \sin(-\theta)}{2} = \frac{\cos \theta + i \sin \theta + \cos \theta - i \sin \theta}{2} = \cos \theta$$

$$\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{\cos \theta + i \sin \theta - \cos(-\theta) - i \sin(-\theta)}{2i} = \frac{\cos \theta + i \sin \theta - \cos \theta + i \sin \theta}{2i} = \sin \theta$$

## 3 Ensemble des complexes de module 1

### 3.1 Propriété

**Théorème 5 :** Soit  $\mathbb{U}$ , l'ensemble des complexes de module 1.

- $z \in \mathbb{U} \Leftrightarrow z = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ .
- L'ensemble  $\mathbb{U}$  est stable par rapport au produit et à l'inverse :

$$z, z' \in \mathbb{U}^* \Rightarrow zz' \in \mathbb{U}^* \text{ et } \frac{1}{z} \in \mathbb{U}^*$$

**Démonstration :** Propriété des modules pour le produit et l'inverse.

### 3.2 Racines $n$ -ième de l'unité

**Théorème 6 :** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- Les racines  $n$ -ième de l'unité sont les solutions de l'équation  $z^n = 1$ .
- $\mathbb{U}_n$  est l'ensemble des  $n$  racines de l'unité :

$$\mathbb{U}_n = \left\{ z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}$$

- Leur somme est nulle :  $\sum_{k=0}^{n-1} z_k = 1 + z_1 + z_2 + \dots + z_{n-1} = 0$
- Leurs images  $M_k$  dans le plan complexe sont les sommets d'un polygone régulier de  $n$  côtés inscrit dans le cercle unité.

**Démonstration :** On décompose  $z$  et  $1$  en module argument, avec  $k \in \mathbb{Z}$  :

$$z^n = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} |z^n| = 1 \\ \arg(z^n) = 0 \pmod{2\pi} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^n = 1 \\ n \arg(z) = 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ \arg(z) = \frac{2k\pi}{n} \end{cases}$$

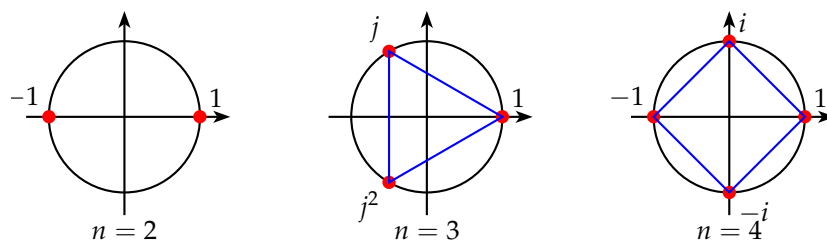
- Il y a  $n$  angles distincts correspondant aux valeurs de  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$
  - Les solutions sont les puissances de  $z_1 = e^{i\frac{2\pi}{n}}$  car  $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} = \left( e^{i\frac{2\pi}{n}} \right)^k = z_1^k$
- $$\sum_{k=0}^{n-1} z_k = \sum_{k=0}^{n-1} z_1^k = 1 + z_1 + \dots + z_1^{n-1} \stackrel{\text{suite géo}}{=} \frac{1 - z_1^n}{1 - z_1} = 0 \quad \text{car } z_1^n = z_0 = 1$$
- Soit les points  $M_k(z_k)$ , on a alors  $(\overrightarrow{OM_k}, \overrightarrow{OM_{k+1}}) = \frac{2\pi}{n}$  avec  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ .  
Les points  $M_k$  sont alors les sommets d'un polygone régulier de  $n$  côtés.

**Exemples :**  $\mathbb{U}_2 = \{1, e^{i\pi}\} = \{1, -1\}$  ,

$\mathbb{U}_3 = \left\{ 1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}} \right\}$  , on pose  $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$  d'où  $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$  ,

$\mathbb{U}_4 = \left\{ 1, e^{i\frac{\pi}{2}}, e^{i\pi}, e^{i\frac{3\pi}{2}} \right\} = \{1, i, -1, -i\}$

On obtient les représentations suivantes :



## 4 Complexes et vecteurs

### 4.1 Affixe d'un vecteur

**Théorème 7 :** Pour tous points  $A(z_A)$  et  $B(z_B)$  du plan complexe, on note :

- $z_{\overrightarrow{AB}}$  l'affixe du vecteur  $\overrightarrow{AB}$  on a alors :

$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A, \quad AB = |z_B - z_A|, \quad (\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)$$

- I milieu de  $[AB]$ , on a alors :  $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$ .

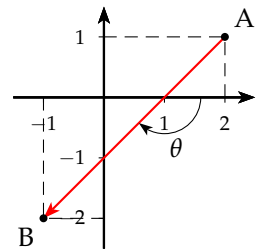
Soit  $A(z_A)$  et  $B(z_B)$ , on a :  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \Leftrightarrow z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$

**Exemple :** On donne :  $A(2 + i)$  et  $B(-1 - 2i)$ . Déterminer les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{AB}$ , la distance  $AB$  et l'angle  $(\vec{u}, \overrightarrow{AB})$ .

- $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = -1 - 2i - 2 - i = -3 - 3i$  donc  $\overrightarrow{AB} = (-3; -3)$

- $AB = |z_B - z_A| = \sqrt{9 + 9} = 3\sqrt{2}$ . On pose  $\theta = (\vec{u}, \overrightarrow{AB})$

$$\left. \begin{array}{l} \cos \theta = -\frac{3}{3\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = -\frac{3}{3\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right\} \theta = -\frac{3\pi}{4} [2\pi]$$



### 4.2 Ensemble de points

**Théorème 8 :** Soit  $r > 0$ , l'ensemble des points  $M(z)$  vérifiant

- $|z - z_A| = r \Leftrightarrow AM = r$  est le cercle de centre  $A$  et de rayon  $r$
- $|z - z_A| = |z - z_B| \Leftrightarrow AM = BM$  est la médiatrice du segment  $[AB]$

### 4.3 Somme de deux vecteurs

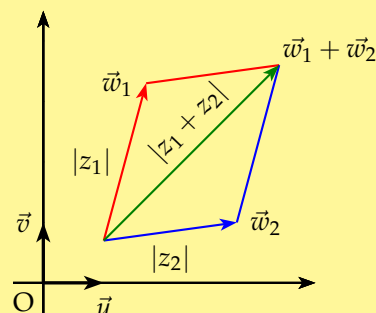
**Théorème 9 :** Soit  $\vec{w}_1(z_1), \vec{w}_2(z_2)$

on a alors :  $\vec{w}_1 + \vec{w}_2(z_1 + z_2)$

et l'inégalité triangulaire :

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

La somme de deux complexes revient à additionner deux vecteurs dans le plan complexe et inversement.



## 4.4 Angle orienté

**Théorème 10 :** Pour tous points A, B, C et D tels que  $(A \neq B)$  et  $(C \neq D)$ , on a :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg \left( \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \right)$$

**Démonstration :** D'après les règles sur les angles orientés :

$$(\vec{v}, \vec{u}) = -(\vec{u}, \vec{v}) \text{ et } (\vec{u}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w})$$

on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) &= (\overrightarrow{AB}, \vec{u}) + (\vec{u}, \overrightarrow{CD}) = (\vec{u}, \overrightarrow{CD}) - (\vec{u}, \overrightarrow{AB}) \\ &= \arg(z_{\overrightarrow{CD}}) - \arg(z_{\overrightarrow{AB}}) = \arg(z_D - z_C) - \arg(z_B - z_A) \\ &= \arg \left( \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \right) \end{aligned}$$

## 4.5 Alignement, parallélisme et orthogonalité

**Propriété 2 :** Soit A, B, C et D quatre points distincts deux à deux

$$\begin{aligned} A, B, C \text{ alignés} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ colinéaires} \Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R} \\ (AB) \text{ et } (CD) \text{ parallèles} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{CD} \text{ colinéaires} \Leftrightarrow \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

**Démonstration :**  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  colinéaires  $\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0 \text{ } [\pi]$

On en déduit que  $\arg \left( \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right) = 0 \text{ } [\pi]$

même chose avec les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$  pour deux droite parallèles

**Propriété 3 :** Soit  $A \neq B$  et  $C \neq D$  quatre points

$$(AB) \perp (CD) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \Leftrightarrow \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$$

**Démonstration :**  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$  orthogonaux  $\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\pi}{2} \text{ } [\pi]$

On en déduit que :  $\arg \left( \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \right) = \frac{\pi}{2} \text{ } [\pi]$

**Remarque :**

Pour montrer que ABC est rectangle isocèle en A, on montre que :  $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \pm i$