Multiples. Division euclidienne. Congruence

Multiples et diviseurs

Exercice 1

Dresser la listes des diviseurs de : 150 et 230

Exercice 2

Déterminer les couples (x, y) d'entiers naturels qui vérifient :
a) $x^2 = y^2 + 21$ b) $x^2 - 7xy = 17$

Exercice 3

Déterminer les entiers relatifs n qui vérifient :
a) $n^2 + n = 20$ b) $n^2 + 2n = 35$

Exercice 4

Déterminer les entiers relatifs n tel que :
a) $n + 1$ divise $3n - 4$ b) $n + 3$ divise $n + 10$

Exercice 5

Le but de l'exercice est de trouver les valeurs du naturel $n > 4$ pour lequel la fraction $\dfrac{n+17}{n-4}$ soit un entier

1) Démontrer que $n - 4$ divise $n + 17$ équivaut à $n - 4$ divise 21
2) Déterminer alors toutes les valeurs de n correspondant au problème.

Exercice 6

Montrer que pour tout entier relatif a, 6 divise $a(a^2 - 1)$

Exercice 7

Soit l'équation (E) dans $\mathbb{N}$: $xy - 5x - 5y - 7 = 0$

1) Montrer que : $xy - 5x - 5y - 7 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-5)(y-5) = 32$
2) Résoudre alors l'équation (E).

Exercice 8

n est un naturel. Démontrer que quel que soit n, $3n^4 + 5n + 1$ est impair et en déduire que ne nombre n'est jamais divisible par $n(n+1)$.

Division euclidienne

Exercice 9

Écrire la division euclidienne de -5000 par 17.

Exercice 10

La différence entre deux naturels est 538. Si l'on divise l'un par l'autre le quotient est 13 et le reste 34. Quels sont ces deux entiers naturels

Exercice 11

1) Trouver les entiers naturels n qui divisés par 4 donne un quotient égal au reste.
2) Le quotient d'un entier relatif x par 3 est 7. Quels sont les restes et les valeur de x possibles ?

Exercice 12

Dans la division euclidienne par un entier b, un nombre a a pour quotient 15 et pour reste 51.

1) Est-ce possible ?
2) Si oui, donner le plus petit nombre a possible. Si non expliquer pourquoi.

Exercice 13

Trouver un naturel qui, divisé par 23, donne pour reste 1 et, divisé par 17, donne le même quotient et pour reste 13.

Exercice 14

Lorsqu'on divise a par b, le reste est 8 et lorsqu'on divise $2a$ par b, le reste est 5. Déterminer ce diviseur b.

Exercice 15

1) Si l'on divise un entier a par 18, le reste est 13. Quel est le reste dans division de a par 6 ?
2) Si l'on divise un entier A par 6, le reste est 4. Quels sont les restes possibles dans division de A par 18 ?

Exercice 16

1) On divise 439 par b, le quotient est 13.
   Quels peuvent être le diviseur et le reste r ?
2) Dans la division entre deux entiers positifs, le dividende est 857 et le quotient 32. Quels peuvent être le diviseur et le reste r ?

Exercice 17

La division de a par b donne $a = 625b + 8\,634$.
De quels naturels peut-on augmenter à la fois a et b sans changer de quotient.

Exercice 18

À la pointe ouest de l'île de Ré, se situe le grand phare des baleines. L'escalier qui mène au sommet a un nombre de marches compris entre 246 et 260.
Ted et Laure sont deux sportifs. Laure qui est plus jeune monte les marches 4 par 4 et à la fin il lui reste 1 marche. Ted, lui, monte les marches 3 par 3 et à la fin il lui reste 2 marches.
Combien l'escalier compte-t-il de marches ?

Algorithme

Exercice 19

Pour faire comprendre la division - d'un entier naturel par un entier naturel non nul - à l'école primaire, on procède par soustractions successives. Si l'on veut diviser 32 par 5, on soustrait 5 à 32 autant de fois que cela est possible.

$$\begin{aligned} 32 - 5 &= 27 \\ 27 - 5 &= 22 \\ 22 - 5 &= 17 \\ 17 - 5 &= 12 \\ 12 - 5 &= 7 \\ 7 - 5 &= 2 \end{aligned}$$

On a ainsi enlevé 6 fois 5 et il reste 2.
On peut donc écrire :

$$32 = 5 \times 6 + 2$$

1) Écrire une fonction en Python, « division(a,b) », renvoyant le quotient q et le reste r dans division dans $\mathbb{N}$ de a par $b \neq 0$ par soustractions successives.
   Tester cette fonction avec : division(32,5) ; division(12,13) et division(1412,13).

2) Améliorer cette fonction de façon à ce qu'elle puisse trouver le quotient q et le reste r de la division d'un entier relatif a par un entier naturel $b \neq 0$.
   Tester cette fonction avec : division(-114,8).

Exercice 20

Pour trouver tous les diviseurs d'un entier $n \geqslant 2$, on commence par écrire dans deux colonnes 1 et n puis on teste si les nombres à partir de 2 sont diviseurs de n en s'arrêtant lorsque de nombre de la colonne 1 est plus petit que la colonne 2. Cela permet de connaître tous les diviseurs d'un entier dans l'ordre croissant.

Pour 120, cela donne :
$D_{120} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120\}$.

Écrire une fonction en Python, « diviseurs(a,b) », renvoyant la liste de tous les diviseurs de n dans l'ordre croissant.

Tester avec diviseurs(120)

nº	col 1	col 2	nº
1	1	120	16
2	2	60	15
3	3	40	14
4	4	30	13
5	5	24	12
6	6	20	11
7	8	15	10
8	10	12	9

Congruence

EXERCICE 21

Pour chaque valeur de a, trouver un relatif $x \in [\![-4, 5]\!]$ tel que : $a \equiv x\ (9)$.

1) $a = 11$ 2) $a = 24$ 3) $a = 62$ 4) $a = 85$ 5) $a = -12$ 6) $a = 32$

EXERCICE 22

Déterminer les valeurs de $x \in \mathbb{Z}$ tel que : $\begin{cases} x + 2 \equiv -1\ (7) \\ 100 \leqslant x < 125 \end{cases}$

EXERCICE 23

À l'aide des règles de compatibilité de la congruence, déterminer :

1) les restes de la division par 7 de : $351^{12} \times 85^{15}$ et $16^{12} - 23^{12}$.
2) les restes de la division par 11 de : 12^{15} , 10^{7} , 78^{15} , 13^{12} , $(-2)^{19}$.

EXERCICE 24

À l'aide des règles de compatibilité de la congruence :

1) Démontrer que pour tout naturel k : $5^{4k} - 1$ est divisible par 13.
2) Démontrer que pour tout entier naturel n : $5^{2n} - 14^{n}$ est divisible par 11.
3) Déterminer le chiffre des unités de l'écriture décimale de 3^{2021}

EXERCICE 25

1) Vérifier que $2^4 \equiv -1\ (17)$ et $6^2 \equiv 2\ (17)$.
2) En déduire le reste de la division par 17 des nombres $1\,532^{20}$ et 346^{12}.

EXERCICE 26

Le nombre n désigne un entier naturel.

1) Démontrer que $(n^2 + 5n + 4)$ et $(n^2 + 3n + 2)$ sont divisible par $(n + 1)$.
2) Déterminer n tel que $(3n^2 + 15n + 19)$ est divisible par $(n + 1)$.
3) En déduire que $(3n^2 + 15n + 19)$ n'est jamais divisible par $(n^2 + 3n + 2)$.

Tableau de congruence

EXERCICE 27

1) Démontrer à l'aide d'un tableau de congruence que pour tout entier n, n^2 est congru soit à 0, soit à 1, soit à 4, modulo 8
2) Résoudre alors, dans $\mathbb{Z}$, l'équation : $(n + 3)^2 - 1 \equiv 0\ (8)$

EXERCICE 28

1) a) Déterminer les restes, suivant les valeurs de n, de la division de 3^n par 11 ?
   b) En déduire les entiers n pour lesquels $3^n + 7$ est divisible par 11.
   c) En déduire que $135^{2021} \equiv 3\ (11)$
2) Déterminer les entiers n tels que $2^n - 1$ soit divisible par 9.

Exercice 29

1) Déterminer les restes possibles dans la division de $4x$ par 9 suivant les valeurs de l'entier relatifs x.
2) Résoudre alors : $4x \equiv 5\ (9)$.

Exercice 30

1) Déterminer, suivant les valeurs de n, les restes possibles de 7^n dans la division par 10.
2) En déduire les entiers n tels que $7^n - 1$ est divisible par 10.
3) En déduire le chiffre des unités de 7^{98}.

Exercice 31

1) Déterminer, suivant les valeurs de n, les restes possibles de 5^n dans la division par 9.
2) En déduire les entiers n tels que $5^n - 1$ est divisible par 9.
3) En déduire que $212^{2020} \equiv 4\ (9)$.

Exercice 32

1) Déterminer, suivant les valeurs de n, les restes possibles de 3^n dans la division par 7.
2) En déduire les entiers n tels que $3^n - 6$ est divisible par 7.
3) En déduire que $164^{2021} \equiv 5\ (7)$.

Exercice 33

Soit x un entier relatif.

1) Déterminer les restes dans la division de x^3 par 9 selon les valeurs de x.
2) En déduire que pour tout entier relatif x :
   - $x^3 \equiv 0\ (9) \quad \Leftrightarrow \quad x \equiv 0\ (3)$.
   - $x^3 \equiv 1\ (9) \quad \Leftrightarrow \quad x \equiv 1\ (3)$.
   - $x^3 \equiv 8\ (9) \quad \Leftrightarrow \quad x \equiv 2\ (3)$.
3) x, y, z sont des entiers relatifs tels que : $x^3 + y^3 + z^3$ est divisible par 9.
   Démontrer que l'un des nombres x, y, z est divisible par 3.

Exercice 34

Soit x et k deux entiers relatifs et $n = x^2 + x - 2$

1) Déterminer l'ensemble E_1, des entiers x tels que n est divisible par 7.
2) Déterminer l'ensemble E_2 des entiers x tels que n est divisible par 3.
3) Vérifier que si $x = 1 + 21k$ ou $x = -2 + 21k$ alors n est divisible par 42.

Exercice 35

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose $A(n) = n^4 + 1$.

1) Étudier la parité de l'entier $A(n)$.
2) Montrer que, quel que soit l'entier n, $A(n)$ n'est pas un multiple de 3.
3) Montrer que, pour tout entier d diviseur de $A(n)$: $n^8 \equiv 1\ (d)$.

Critères de divisibilité

Exercice 36

Divisibilité par 7

1) Démontrer la proposition suivante :
   « Un nombre est divisible par 7 si, et seulement si, le nombre de ses dizaines diminué du double du chiffre de ses unités est divisible par 7. On peut réitérer le processus si nécessaire. »
2) Montrer, à l'aide de ce critère, que 406, 895 et 5 607 sont divisible par 7.

Exercice 37

Divisibilité par 25

Soit un entier naturel n tel que : $n = 100a + b$ avec $a, b \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant b < 100$.

1) Prouver que n est divisible par 25 si, et seulement si, b est divisible par 25.
2) Énoncer en français un critère simple de divisibilité par 25.

Exercice 38

Divisibilité par 13

Soit un entier naturel n tel que : $n = 10a + b$ avec $a, b \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant b \leqslant 9$.

1) Établir la liste des multiples de 13 inférieurs à 100.
2) Montrer que : $n \equiv 0\ (13) \quad \Leftrightarrow \quad a + 4b \equiv 0\ (13)$.
3) Énoncer en français un critère simple de divisibilité par 13.
4) En déduire, sans calculatrice, les multiples de 13 parmi les entiers suivants : 676, 943, 4 652, 156 556.

Exercice 39

Divisibilité par 11

Un entier x est compose de (n+1) chiffres notés : $a_0, a_1, \dots, a_n$.

On note alors : $x = \overline{n_n \dots a_1 a_0}$.

1) Sachant que $10 \equiv -1\ (11)$, montrer que :
   $$x \equiv (a_0 + a_2 + a_4 + \dots) - (a_1 + a_3 + \dots)\ (11)$$
2) Énoncer un critère de divisibilité par 11.
3) Déterminer, pour chacun des entiers suivants, son reste dans la division par 11.
   a) 123 456 789 b) 10 891 089 c) $\underbrace{5555\dots5}_{100 \text{ fois}}$ d) 147 856 103

EXERCICE 40

Divisibilité par 9 par deux méthodes

1) a) Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel non nul n le reste de 7^n dans la division euclidienne par 9.
   b) Démontrer alors que $(2005)^{2005} \equiv 7\ (9)$.
2) a) Démontrer que pour tout entier naturel non nul n : $(10)^n \equiv 1\ (9)$.
   b) Soit N un entier naturel écrit en base dix, et S la somme de ses chiffres. Démontrer que : $N \equiv S\ (9)$.
   c) En déduire que N est divisible par 9 si et seulement si S est divisible par 9.
3) On suppose que $A = (2005)^{2005}$; on désigne par :
   - B la somme des chiffres de A ;
   - C la somme des chiffres de B ;
   - D la somme des chiffres de C.

   a) Démontrer que : $A \equiv D\ (9)$.
   b) Sachant que $2005 < 10\,000$, démontrer que A s'écrit en numération décimale avec au plus 8 020 chiffres. En déduire que $B \leqslant 72180$.
   c) Démontrer que $C \leqslant 45$.
   d) En étudiant la liste des entiers inférieurs à 45, déterminer un majorant de D plus petit que 15.
   e) Démontrer que $D = 7$.

EXERCICE 41

Vrai-Faux

Proposition 1 : Le reste de la division euclidienne de 2011^{2011} par 7 est 2.

Proposition 2 : 11^{2011} est congru à 4 modulo 7.

Proposition 3 : « $x^2 + x + 3 \equiv 0$ (modulo 5) si et seulement si $x \equiv 1$ (modulo 5). »

Résolution d'équations

EXERCICE 42

Équation du second degré

On considère l'équation (E) : $11x^2 - 7y^2 = 5$, avec $x, y \in \mathbb{Z}$..

1) Démontrer que si le couple $(x\ ;\ y)$ est solution de (E), alors $x^2 \equiv 2y^2\ (5)$.
2) Soit x et y des entiers relatifs. Recopier et compléter les deux tableaux suivants :

$x \equiv \dots\ (5)$	0	1	2	3	4
$x^2 \equiv \dots\ (5)$					

$y \equiv \dots\ (5)$	0	1	2	3	4
$2y^2 \equiv \dots\ (5)$					

   Quelles sont les valeurs possibles du reste de la division de x^2 et de $2y^2$ par 5 ?
3) En déduire que si $(x\ ;\ y)$ est solution de (E), alors x et y sont des multiples de 5.

EXERCICE 43

Équation du second degré

On considère l'équation notée (F) : $3x^2 + 7y^2 = 10^{2n}$ avec $x, y \in \mathbb{Z}$.

1) Montrer que $100 \equiv 2$ (modulo 7).
Démontrer que si $(x\ ;\ y)$ est solution de (F) alors $3x^2 \equiv 2^n\ (7)$.
2) Reproduire et compléter le tableau suivant :

$x \equiv \dots\ (7)$	0	1	2	3	4	5	6
$3x^2 \equiv \dots\ (7)$							

3) Démontrer que 2^n est congru à 1, 2 ou 4 modulo 7.
En déduire que l'équation (F) n'admet pas de solution.

EXERCICE 44

Inverse modulo 5

On appelle inverse de x modulo 5, un entier y tel que $xy \equiv 1\ (5)$.

1) Déterminer un inverse modulo 5 de $x = 2$.
2) Déterminer un inverse modulo 5 de $x = 3$ et $x = 4$.
3) Est-ce que $x = 5$ admet un inverse ? Pourquoi ?
4) À l'aide d'un tableau de congruence, déterminer suivant la valeur de x son inverse modulo 5.
5) À l'aide de ce tableau, résoudre les équations suivantes.
a) $2x \equiv 3\ (5)$ b) $9x \equiv 1\ (5)$

Écriture décimale

EXERCICE 45

On décide de former des nombres dans le système décimal en écrivant de gauche à droite quatre chiffres consécutifs dans l'ordre croissant puis on permute les deux premiers chiffres de gauche. Par exemple, à partir de 4 567 on obtient 5 467 ; à partir de 2 345 on obtient 3 245.
Démontrer que tous les entiers naturels ainsi obtenus sont multiples de 11.

EXERCICE 46

On considère un entier de 3 chiffres. On appelle renversé de cet entier le nombre qui s'écrit en échangeant les chiffres des centaines et des unités. Par exemple, le renversé de 158 est 851.
Montrer que la différence entre un entier de 3 chiffres et son renversé est divisible par 9.

EXERCICE 47

Suite

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 14 \\ u_{n+1} = 5u_n - 6 \end{cases}$

1) Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.
   Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers chiffres de u_n ?
2) Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} \equiv u_n \ (4)$.
   En déduire que pour tout entier naturel k, $u_{2k} \equiv 2 \ (4)$ et $u_{2k+1} \equiv 0 \ (4)$.
3) a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $2u_n = 5^{n+2} + 3$.
   b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $2u_n \equiv 28 \ (100)$.
4) Déterminer les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de u_n suivant n.

EXERCICE 48

Cube et terminaison décimale

Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe un entier naturel n dont l'écriture décimale du cube se termine par 2 009, c'est-à-dire tel que $n^3 \equiv 2\,009 \ (10\,000)$.

Partie A

1) Quel est le reste de $2\,009^2$ dans la division par 16 ?
2) En déduire que $2\,009^{8001} \equiv 2\,009 \ (16)$.

Partue B

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 2009^2 - 1 \\ u_{n+1} = (u_n + 1)^5 - 1 \end{cases}$.

1) a) Démontrer que u_0 est divisible par 5.
   b) On rappelle le binôme de Newton à l'ordre 5 :
   $$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$
   Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = u_n[u_n^4 + 5(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1)]$.
   c) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n$ divisible par $5^n + 1$.
2) a) Vérifier que $u_3 = 2\,009^{250} - 1$ puis en déduire que $2\,009^{250} \equiv 1 \ (625)$.
   b) Démontrer alors que : $2\,009^{8001} \equiv 2\,009 \ (625)$.

Partie C

On admet que l'on peut montrer que $2\,009^{8001} - 2\,009$ est divisible par 10 000.
Déterminer un entier dont l'écriture décimale du cube se termine par 2 009.

Divers

EXERCICE 49

Vrai-Faux

1) M et N ont respectivement pour écriture en base 10 : $\overline{abc}$ et $\overline{bca}$.
   Proposition 1 : Si l'entier M est divisible par 27 alors l'entier $M - N$ est aussi divisible par 27.
2) **Proposition 2 :** 3 divise $(2^{2n} - 1)$ pour tout entier naturel n.
3) **Proposition 3 :** Si $x^2 + x \equiv 0 \ (6)$ alors $x \equiv 0 \ (3)$.
4) **Proposition 4 :** Si $ab \equiv 0 \ (6)$ alors $a \equiv 0 \ (6)$ ou $b \equiv 0 \ (6)$
5) **Proposition 5 :** Si $2x \equiv 4 \ (12)$ alors $x \equiv 2 \ (12)$

EXERCICE 50

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 3u_n + 1 \end{cases}$

1) a) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 2u_n = 3^n - 1$.
   b) Déterminer le plus petit entier naturel non nul n tel que 3^n est congru à 1 modulo 7.
   c) En déduire que u_{2022} est divisible par 7.
2) a) Calculer le reste de la division euclidienne par 5 de chacun des cinq premiers termes de la suite (u_n).
   b) Sans justification, compléter le tableau suivant.

$m \equiv \dots\ (5)$	0	1	2	3	4
$3m + 1 \equiv \dots\ (5)$					

   c) En déduire que, pour tout entier naturel n, si u_n est congru à 4 modulo 5, alors $u_n + 4$ est congru à 4 modulo 5.
   d) Existe-t-il un entier naturel n tel que le reste de la division de u_n par 5 soit égal à 2 ?

EXERCICE 51

Dans cet exercice, on appelle j le numéro du jour de naissance dans le mois et m le numéro du mois de naissance dans l ?'année.
Par exemple, pour une personne nee le 14 mai : $j = 14$ et $m = 5$.

Partie A
Lors d'une représentation, un magicien demande aux spectateurs d ?'exécuter le programme de calcul (A) suivant. ?

- Prenez le numéro de votre jour de naissance et multipliez-le par 12.
- Prenez le numéro de votre mois de naissance et multipliez-le par 37.
- Ajoutez les deux nombres obtenus.

Je pourrai alors vous donner la date de votre anniversaire.

Un spectateur annonce 308 et en quelques secondes, le magicien déclare : Votre anniversaire tombe le 1^er^ août !

1) Vérifier que pour une personne née le 1^er^ août, le programme de calcul (A) donne effectivement le nombre 308.
2) a) Pour un spectateur donné, on note z le résultat obtenu en appliquant le programme de calcul (A).
   Exprimer z en fonction de j et de m et démontrer que $z \equiv m\ (12)$.
   b) Retrouver alors la date de d'anniversaire d'un spectateur ayant obtenu le nombre 455 en appliquant le programme de calcul (A).

Partie B
Lors d'une autre représentation, le magicien décide de changer son programme de calcul. Pour un spectateur dont le numéro du jour de naissance est j et le numéro du mois de naissance est m, le magicien demande de calculer le nombre z défini par : $z = 12j + 31m$.

```
for m in range(1,...):
    for j in range(1,...):
        z=12j+31m
        if ... ...
            print(j,m)
```

1) Compléter cet algorithme afin qu'il affiche toutes les valeurs de j et de m telles que : $12j + 31m = 503$.
2) Quelle est alors la date d'anniversaire correspondante ?

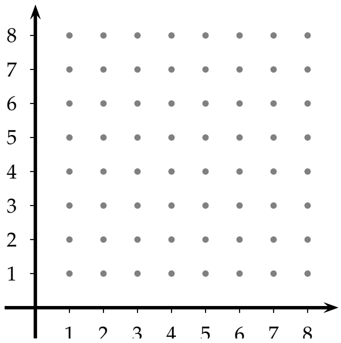
EXERCICE 52

Soit $a, b \in \mathbb{N}^*$, on appelle réseau de a et b, noté $R_{a,b}$ l'ensemble des points du plan, dont les coordonnées $(x; y)$ sont des entiers vérifiant : $0 \leqslant x \leqslant a$ et $0 \leqslant y \leqslant b$.

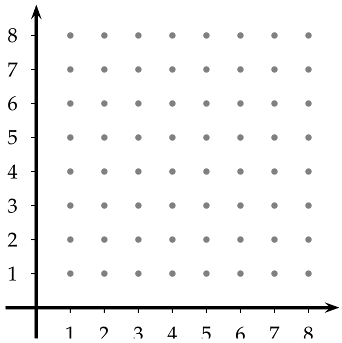
Le but de l'exercice est de relier certaines propriétés arithmétiques des entiers x et y à des propriétés géométriques des points correspondants du réseau.

Représenter graphiquement les points $\mathrm{M}(x; y)$ du réseau $R_{8,8}$ vérifiant :

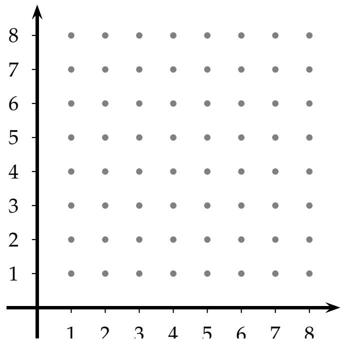
1) $x \equiv 2\ (3)$ et $y \equiv 1\ (3)$, sur le graphique 1.
2) $x + y \equiv 1\ (3)$, sur le graphique 2.
3) $x \equiv y\ (3)$, sur le graphique 3.



Graphique 1



Graphique 2

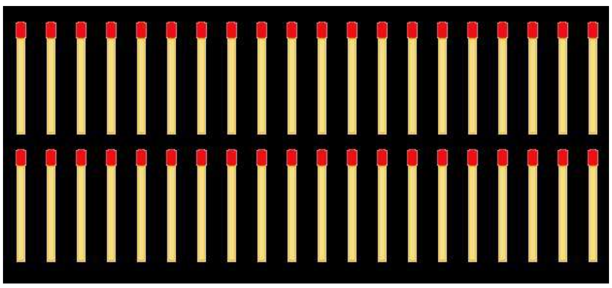


Graphique 3

EXERCICE 53

Jeu de Nim

Sur la figure ci-dessous, 40 allumettes sont disposées sur le tapis.



Deux joueurs prennent chacun, à tour de rôle, une, deux trois ou quatre allumettes. Celui qui prend la dernière allumettes perd la partie.
Il existe une stratégie gagnante pour le joueur qui commence. Laquelle ?

Exercice 54

Base 12 et divisibilité

On note 0, 1, 2 , . . ., 9, α, β, les chiffres de l-écriture d-un nombre en base 12.

Par exemple :

$\overline{\beta\alpha7}^{12} = \beta \times 12^2 + \alpha \times 12 + 7 = 11 \times 12^2 + 10 \times 12 + 7 = 1\,711$ en base 10

1) a) Soit N_1 le nombre s'écrivant en base 12 par $N_1 = \overline{\beta1\alpha}^{12}$
Déterminer l'écriture de N_1 en base 10.

b) Soit N_2 le nombre s-écrivant en base 10 par : $N_2 = 1\,131$.
Déterminer l'écriture de N_2 en base 12.

Dans la suite, un entier N s'écrira en base 12 par : $N = \overline{a_n \dots a_1 a_0}$.

2) a) Démontrer que $N \equiv a_0\ (3)$.
En déduire un critère de divisibilité par 3 d'un nombre écrit en base 12.

b) À l'aide de son écriture en base 12, déterminer si N_2 est divisible par 3.
Confirmer avec son écriture en base 10.

3) a) Démontrer que : $N \equiv a_n + \cdots + a_1 + a_0\ (11)$.
En déduire un critère de divisibilité par 11 d'un nombre écrit en base 12.

b) À l'aide de son écriture en base 12, déterminer si N_1 est divisible par 11.
Confirmer avec son écriture en base 10.

4) Un nombre N s'écrit $\overline{x4y}^{12}$.
Déterminer les valeurs de x et y pour lesquelles N est divisible par 33.
Déterminer alors les nombres N possibles avec leurs écritures en base 10.

Exercice 55

Algorithme de Luhn

Un numéro de carte bancaire est de la forme : $a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10}a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15}c$.
où a_1, a_2,. . ., a_{15} et c sont des chiffres compris entre 0 et 9.
Les quinze premiers chiffres contiennent des informations sur le type de carte, la banque et le numéro de compte bancaire.
c est la clé de validation du numéro. Ce chiffre est calculé à partir des quinze autres.
L'algorithme suivant, en langage naturel, permet de valider la conformité d'un numéro de carte.

```
I prend la valeur 0
P prend la valeur 0
R prend la valeur 0
Pour k allant de 0 à 7 :
        R prend la valeur du reste de la division de 2a_{2k+1} par 9
        I prend la valeur I + R
Fin Pour
Pour k allant de 1 à 7 :
        P prend la valeur P + a_{2k}
Fin Pour
S prend la valeur I + P + c
Si S est un multiple de 10 alors :
        Afficher « Le numéro de la carte est correct »
Sinon :
        Afficher « Le numéro de la carte n'est pas correct »
Fin Si
```

1) On considère le numéro de carte suivant : 5635 4002 9561 3411.
   a) Compléter le tableau permettant d'obtenir la valeur finale de la variable I.

k	0	1	2	3	4	5	6	7
a_{2k+1}								
$2a_{2k+1}$								
R								
I								

   b) Résumer en une phrase ce que fait cet algorithme qui s'appelle l'algorithme de Luhn.
   c) Justifier que le numéro de la carte 5635 4002 9561 3411 est correct.
   d) On modifie le numéro de cette carte en changeant les deux premiers chiffres. Le premier chiffre (initialement 5) est changé en 6.
      Quel doit être le deuxième chiffre a pour que le numéro de carte obtenu $6a35$ 4002 9561 3411 reste correct ?
2) On connaît les quinze premiers chiffres du numéro d'une carte bancaire.
   Montrer qu'il existe une clé c rendant ce numéro de carte correct et que cette clé est unique.
3) Un numéro de carte dont les chiffres sont tous égaux peut-il être correct ?
   Si oui, donner tous les numéros de carte possibles de ce type.
4) On effectue le test suivant : on intervertit deux chiffres consécutifs distincts dans un numéro de carte correct et on vérifie si le numéro obtenu reste correct.
   On a trouvé une situation où ce n'est pas le cas, l'un des deux chiffres permutés valant 1.
   Peut-on déterminer l'autre chiffre permuté ?

EXERCICE 56

Racine rationnelle d'un polynôme

Soit $P(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$.

Le but de cet exercice est de montrer que $P(x) = 0$ n'a pas de solutions entières ou rationnelles.

1) On suppose qu'il existe une solution rationnelle $x = \dfrac{p}{q}$ fraction irréductible.
   Montrer que : $p^3 - p^2q - 2pq^2 + q^3 = 0$ (E).
2) Montrer que (E) se met sous la forme : $p^2(p-q) + q^3 \equiv 0\ (2)$ (E′).
3) Montrer que (E′) n'admet des solutions que si p est pair.
4) Conclure.